Uma investigação acerca de algumas formas de se conceber o papel da História da Matemática na Pesquisa Contemporânea em Educação Matemática

Antonio Miguel

FE/UNICAMP
Pref. Municipal de Campinas
Secretaria da Educação
Campinas, SP
2015

Uma investigação acerca de algumas formas de se conceber o papel da História da Matemática na Pesquisa Contemporânea em Educação Matemática

Antonio Miguel

Elaboração da ficha catalográfica **Tiragem**
Rosemary Passos Eletrônica (E-book)
(Bibliotecária)

Núcleo Editorial **Apoio institucional**
FE/UNICAMP UNICAMP - Faculdade de Educação
Av. Bertrand Russell, 801 - Cidade Universitária
13083-970 Campinas - SP
Tel: (19) 3521-5571
E-mail: bibrose@unicamp.br

Catalogação na Publicação (CIP) elaborada por
Rosemary Passos – CRB-8ª/5771

M588i Miguel, Antonio, 1953-
Uma investigação acerca de algumas formas de se conceber o papel da história da matemática na pesquisa contemporânea em educação matemática / Antonio Miguel. - Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2015.

ISBN: 978-85-7713-170-9

1. Matemática – História. 2. Educação matemática. 3. Pesquisa educacional. I. Miguel, Antonio, 1953- III. Título.

15-071-BFE 20ª CDD – 510.9

Impresso no Brasil
2015

ISBN: 978-85-7713-170-9

Sumário

Uma investigação acerca de algumas formas de se conceber o papel da História da Matemática na Pesquisa Contemporânea em Educação Matemática

Antonio Miguel*

1. Introdução

O texto que ora apresentamos ao leitor neste livro, com alguns acréscimos e revisões, foi o produto de uma das duas investigações independentes, porém conectadas, que realizei no período de julho a dezembro de 1999. Embora institucionalmente apresentado, na ocasião, como dois relatórios de pesquisas desenvolvidas em período de semestre sabático, esses textos nunca chegaram a ser publicados em sua íntegra, ainda que tenham inspirado falas em eventos, produção de livro e de artigos posteriormente publicados em periódicos nacionais. O presente texto pode ser considerado, em grande medida, continuidade e desdobramento imediatos das preocupações que haviam sido tematizadas e investigadas em minha tese de doutorado intitulada *Três estudos sobre História e Educação* Matemática[1].

Em um dos três estudos independentes dessa tese, tive por propósito fazer um levantamento e análise de alguns argumentos que tentavam reforçar as potencialidades pedagógicas da história da matemática, contrapondo-os a outros, menos frequentes, mas não menos importantes, que buscavam evidenciar as dificuldades e os problemas que poderiam colocar-se à concretização dessas potencialidades. Nesse estudo, intitulado *A história e o ensino-aprendizagem da matemática*[2], a discussão referida se processou à luz de um conjunto não-exaustivo de argumentos que se manifestaram em uma documentação básica constituída de artigos publicados em revistas nacionais e internacionais de Educação Matemática, súmulas contidas em Anais de Encontros nacionais e internacionais de Educação Matemática, capítulos de livros e referências esparsas contidas nas obras de matemáticos, historiadores da matemática e educadores matemáticos.

---

*Docente do Departamento de Ensino e Práticas Culturais da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP-SP). Membro integrante dos Grupos de Pesquisa HIFEM (História, Filosofia e Educação Matemática) e PHALA (Educação, Linguagem e Práticas Culturais).

[1] (Miguel, 1993).

Tendo em vista a postura crítica por mim assumida em relação à maior parte dos argumentos reforçadores e questionadores considerados naquele estudo, cheguei a sugerir, naquela ocasião, a título de conclusão provisória, uma proposta alternativa que via na história em geral e, particularmente na história da matemática e da educação matemática, um ponto de referência para a problematização pedagógica no âmbito da educação matemática contemporânea. Entretanto, esse ponto de vista não chegou a ser, naquela ocasião, suficientemente desenvolvido e fundamentado.

Um passo a mais foi dado no sentido da fundamentação desse ponto de vista através do artigo intitulado *Estudos Histórico-pedagógicos Temáticos e História-problema*[3], por mim apresentado no I Encontro de História e Educação Matemática ocorrido em Braga-Portugal, em 1996, e publicado integralmente nos Anais daquele Encontro. Mas naquele artigo, a ênfase era posta mais na noção de *Estudo Histórico-pedagógico Temático* do que, propriamente, no aprofundamento da concepção de história como ponto de referência.

Por ocasião de minha participação em uma mesa redonda no VI ENEM (VI Encontro Nacional de Educação Matemática), ocorrido em julho de 1998 em São Leopoldo - RS[4], procurei retomar minhas reflexões acerca das relações entre história e ensino aprendizagem da matemática e pude perceber que grande parte, senão a totalidade, dos argumentos aparentemente distintos geralmente utilizados para reforçar as potencialidades pedagógicas da história estariam baseados no pressuposto de que o ensino-aprendizagem da matemática deveria funcionar como um ‘espelho’ mais ou menos fiel da história da matemática.

De pronto, a seguinte questão me ocorreu: que analogias e que dissonâncias poderiam evidenciar-se quando comparamos as concepções especulares ou não-especulares mais recentes da relação entre história, epistemologia e educação matemática com a concepção de história como ponto de referência para a problematização pedagógica?

---

[2] Miguel, 1997); (Miguel, 1998a); (Miguel, 1999).
[3] (Miguel, 1996).
[4] (Miguel, 1998b).

Esta foi a questão motivadora que orientou uma outra investigação, que correu paralelamente a esta, intitulada *Formas especulares e não-especulares de se conceber a relação entre história, epistemologia e educação matemática*[5].

Entretanto, embora a questão relativa às potencialidades pedagógicas da história da matemática venha sendo tematizada, pelo menos, desde o final do século XIX, foi apenas a partir das duas últimas décadas do século XX que alguns educadores matemáticos começaram a perceber e a evidenciar, através da realização de pesquisas acadêmicas, a importância de se recorrer à história da matemática também no âmbito da própria investigação acadêmica em educação matemática. E daí, tendo em vista o fato de que essas iniciativas tiveram e continuam tendo grande repercussão na comunidade internacional de educadores matemáticos, mas que, na comunidade brasileira, elas pouco chegaram a ser examinadas de modo crítico e sistemático, julguei oportuno dedicar a maior parte de meu esforço neste estudo para proceder a esse exame, não apenas descrevendo com certo grau de detalhe essas investigações, como também analisando-as criticamente.

A consulta a periódicos internacionais de Educação Matemática e a anais de encontros de Educação Matemática e de História da Matemática revelou alguns dos investigadores da atualidade que vêm, direta ou indiretamente, explorando conexões entre a História da Matemática e a investigação acadêmica em Educação Matemática. São eles: Luiz Moreno e Guillermina Waldegg, ambos pesquisadores do Departamento de Matemática Educativa do Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestat - IPN - México); Janet Heine Barnett, da University of Southern Colorado - USA; pesquisadores filiados à escola francesa contemporânea de didática da matemática, tais como Guy Brousseau, Georges Glaeser, Michèle Artigue e Régine Douady; Anna Sierpinska, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Concordia em Montreal - Canadá; Anna Sfard, do Centro de Ensino de Ciências da *The Hebrew University* de Jerusalém - Israel.

A quase totalidade das pesquisas realizadas por esses investigadores encontra-se publicada em língua francesa ou inglesa, e todas as passagens que citei

[5] (Miguel, 1999); (Miguel, 2015b).

desses trabalhos foram por mim traduzidas livremente para o português, mas sempre remetendo o leitor às fontes originais utilizadas.

Por sua vez, o estudo realizado veio a revelar também que uma avaliação crítica dessas iniciativas de investigação dificilmente poderia ter sido realizada sem um exame prévio dos referenciais teóricos sobre os quais elas se basearam.

Nesse sentido, o estudo mostrou que a totalidade das investigações examinadas baseia-se, direta ou indiretamente, ou na noção de *mecanismos de passagem*, apropriada do referencial teórico desenvolvido por Piaget & Garcia, na obra intitulada *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*[6], ou na noção de *obstáculo epistemológico*, apropriada do referencial desenvolvido por Gaston Bachelard em seu *A Formação do Espírito Científico*[7], ou ainda, na noção de *dualidade* apropriada do referencial da *Teoria da Complementaridade* desenvolvida pelos pesquisadores alemães Michael Otte[8] e Hans-Georg Steiner[9]. É por essa razão que este estudo dedica um espaço considerável ao exame desses referenciais.

O processo de investigação revelou, finalmente, que esses referenciais, por sua vez, explícita ou implicitamente, acabam sustentando-se em uma determinada forma de se conceber a relação entre história da matemática, epistemologia e cognição, ou ainda, entre história da matemática, epistemologia e ensino-aprendizagem de matemática. É por essa razão que outra parte de meu esforço neste estudo está dirigida para o exame dessa questão particular subjacente aos referenciais teóricos analisados.

E como, muitas vezes, as concepções dessa relação, que inspiram as pesquisas levadas a cabo neste setor particular da investigação em educação matemática, são as mesmas que fundamentam as propostas de ação pedagógica que buscam uma inserção de história no ensino, parte das reflexões e dos resultados deste presente estudo foi, de certo modo, retomada em minha pesquisa acima citada[10], que correu paralela a esta.

A minha esperança é que este estudo possa vir a contribuir para o esclarecimento das formas contemporâneas de participação da história da

[6] (Piaget & García, 1982).
[7] (Bachelard, 1991); (Bachelard, 1996).
[8] (Otte, 1993).
[9] (Steiner, 1993).
[10] (Miguel, 2015).

matemática no âmbito da pesquisa acadêmica em Educação Matemática e para a emergência de formas alternativas de se pensar essa participação.

2. Algumas pesquisas que recorrem à história da matemática com base no referencial teórico desenvolvido por Jean Piaget e Rolando Garcia e/ou na teoria da equilibração de Jean Piaget

Jean Piaget (1896-1980)[11] **Rolando García (1919-2012)**

Sem a pretensão de ser exaustivo, tenho a intenção, nesta seção do Relatório, de dar a conhecer e analisar algumas pesquisas ou reflexões que têm tentado tematizar a relação entre história da matemática e educação matemática com base no referencial teórico desenvolvido por PIAGET & Garcia na obra intitulada *Psicogénesis e historia de la ciencia*[12] e/ou com base na teoria da equilibração proposta por Piaget em obras tais como *A equilibração das estruturas cognitivas*[13] e *Les formes élémentaires de la dialectique*[14]. Antes, porém, procuro tecer algumas considerações acerca desses referenciais.

[11] Fonte: (http://www.creativitycenter.ch/bloc_deroulant/jean-piaget-and-genetic-epistemology/).
[12] (Piaget & García, 1982).
[13] (Piaget, 1976)
[14] (Piaget, 1980).

2.1. A teoria da equilibração de Jean Piaget

Foi em 1957 que Piaget propôs sua primeira teoria bastante elaborada da equilibração. Uma espécie de necessidade lógica probabilista estava, então, subjacente à explicação do processo que conduzia à integração de esquemas disjuntos no desenvolvimento cognitivo.

Segundo Lerbet[15], é preciso lembrar que essa "lógica" probabilista estrita é coerente com o estruturalismo construtivista: "as estruturas se integram para produzir novas estruturas mais abstratas, segundo relações harmoniosas como as que Piaget estabeleceu entre percepção e inteligência".

Mas essa primeira teoria da equilibração, continua Lerbet[16], "parece não ter 'funcionado' senão para fornecer a coerência fundamental à parte genética e estritamente estruturalista de sua obra até o final dos anos 50".

Mas é no início da década de 70, ao dar-se conta do papel desempenhado pelas contradições no desenvolvimento da tomada de consciência, que os trabalhos de Piaget sofrem uma grande transformação, dando origem a uma nova versão da teoria da equilibração.

A necessidade e a natureza dessa transformação não apenas insinuam-se nos títulos das obras dedicadas à primeira e segunda versões da teoria - respectivamente *Lógica e Equilíbrio* e *A Equilibração das Estruturas Cognitivas* -, como também são percebidas e explicadas pelo próprio Piaget[17] no prefácio da segunda obra citada:

> Esta obra constitui uma completa reformulação do volume II dos Études d'Epistémologie Génétique, que se intitulava Logique et Équilibre. Realmente, os modelos então utilizados mostraram-se, claramente, insuficientes e convinha, pois, retomar o problema em seu conjunto, tanto mais que ele domina todas as questões do desenvolvimento do conhecimento. A idéia central é que este não procede nem da experiência única dos objetos, nem de uma programação inata pré-formada no sujeito, mas de construções sucessivas com elaborações constantes de estruturas novas. Neste caso, os mecanismos a invocar só podem ser aqueles das regulações que conduzem, então, não a formas estáticas de equilíbrio, mas a reequilibrações melhorando as estruturas anteriores. É por isso que falaremos de equilibração enquanto processo e não somente de equilíbrios e, sobretudo, de equilibrações "majorantes" que corrigem e completam as formas precedentes de equilíbrio.

---

[15] (Lerbet, 1990, p. 6).
[16] (Lerbet, 1990, p. 7).
[17] (Piaget, 1976, p. 7).

Nessa nova versão, segundo Lerbet[18],

> a equilibração procede de regulações que podem ser positivas, negativas ou ambas quando a situação é muito complexa, porque, se toda regulação é uma reação a uma perturbação, a recíproca não se verifica senão parcialmente.

Esse papel positivo desempenhado pelo conflito cognitivo está também na base da nova teoria piagetiana da equilibração, proposta como modelo descritivo e explicativo do desenvolvimento cognitivo.

De fato, Rolando Garcia[19], no posfácio do *Les Formes élémentaires de la dialectique* - obra pertencente à fase em que a teoria piagetiana desloca-se do paradigma estrutural para o sistêmico - reconhece explicitamente o papel fundamental que a dialética desempenha no processo cognitivo:

> Os filósofos clássicos não haviam suspeitado que de análises ao mesmo tempo sociogenéticas e psicogenéticas poderia resultar uma teoria do conhecimento estável e coerente. Não era mais possível não reconhecer à dialética um papel intrínseco na teoria do conhecimento, na medida em que o processo cognitivo não pode ser concebido senão como uma série de etapas, e a passagem de uma à seguinte nada mais sendo que a superação de uma situação conflitual.

Portanto, o modelo de desenvolvimento cognitivo adotado pela nova teoria piagetiana da equilibração pode ser considerado dialético - uma vez que o progresso cognitivo resulta de superações de conflitos ou contradições - desde que, porém, se entenda a palavra 'contradição' como 'contradição dialética' e desde que não se entenda 'contradição dialética' no sentido hegeliano, mas sim, como nos adverte Piaget, como fusão, em uma totalidade nova, de dois sistemas até então distintos e separados, *mas de modo algum opostos um ao outro*. Isso porque, afirma Piaget[20],

> não se 'supera' uma contradição lógica ou formal, mas suprimimo-la ou descartamo-la por correção local ou mudando de teoria. Não existe, com efeito, lógica de superação, e se se pode e se deve falar de 'superações dialéticas' em múltiplos domínios, é porque a contradição dialética está mais próxima daquelas do pensamento natural do que aquelas da lógica formal.

Desse modo, "a 'contradição' dialética aparece como uma noção cujo significado permanece psicogenético, sociogenético ou histórico, e não inerente às estruturas operatórias que tendem a um estado de fechamento"[21].

---

[18](Lerbet, 1990, p. 8).
[19] (Piaget, 1980, p. 233).
[20] (Piaget, 1974, p. 154).
[21] (Piaget, 1976, p. 20).

Ainda que não seja minha intenção realizar aqui uma análise crítica da Teoria da Equilibração Majorante de Piaget em sua forma geral, mas unicamente no que diz respeito ao modo como ela tem sido apropriada no terreno da pesquisa das relações entre história e educação matemática, vale a pena destacar, de forma breve, algumas críticas e objeções que a ela têm sido levantadas. Limitar-me-ei a enunciá-las sem entrar em seus méritos, detalhamentos ou réplicas:

1. A Teoria da Equilibração de Piaget sustenta-se na crença da existência de parentescos entre a evolução biológica e a ontogênese biológica por um lado, e o desenvolvimento do conhecimento filogenético e ontogenético por outro. Desse modo, Piaget nada mais faz do que tentar derivar a Psicologia da Biologia, o que é ilegítimo, uma vez que, se os atos psicológicos são intencionais, os fatos do mundo físico não o são[22].

2. O conhecimento é, sobretudo, um fenômeno sócio-cultural. O biologismo subjacente à Teoria da Equilibração e a toda teoria piagetiana do conhecimento faz com que Piaget acabe identificando ilegitimamente os ambientes biológico e social, uma vez que toda a sua teoria está baseada em uma só disciplina: a Biologia. "O esforço feito por Piaget para resolver os problemas de outras disciplinas científicas mediante a dialética específica de uma única disciplina científica tem forçosamente que falhar"[23].

3. Subjacente à teoria da Equilibração de Piaget existe a crença de que o indivíduo constroi solitariamente o conhecimento interagindo com o mundo, o que é incorreto, uma vez que o conhecimento só pode ser construído no interior de um contexto no qual o acordo com outros indivíduos se mostra indispensável[24].

4. Na Teoria da Equilibração de Piaget não há uma resposta satisfatória para a questão: 'como é que o sujeito sabe o que é que o está desequilibrando?'. Isso se deve ao fato de na teoria piagetiana existirem duas esferas incomunicáveis e

---

[22] (MacNamara & Mischel apud Vuyk, 1985, vol. II, p. 545-546).
[23] (Tripp, G. M. apud Vuyk, 1985, vol. II, p.546).
[24] (Hamlyn, D. W. apud Vuyk, 1985, vol. II, p. 545-546).

desconectadas: uma na qual se situa o equilíbrio e a energia e outra na qual se situa a relevância e o valor[25].

5. Subjacentes à Teoria da Equilibração de Piaget convivem duas crenças contraditórias: uma consiste em supor que as leis da equilibração e da autoregulação são de natureza puramente mecanicista e determinista, e a outra em supor a existência de um processo majorante ou crescente de equilibração. A primeira dessas crenças implica numa descrição inatista ou pré-formista dos processos de crescimento do conhecimento, o que contradiz a segunda crença[26].

6. Subjacente à Teoria da Equilibração de Piaget existe a crença de que é possível (e necessário) quantificar o equilíbrio. Mas se é possível falar em equilíbrios mais ou menos estáveis é porque, para Piaget, os estados de equilíbrio são concebidos, na verdade, como estados de ausência de equilíbrio. Logo, mais do que prescrever estados internamente estáveis o que a teoria prescreve é a desordem. Portanto, "existem muitas respostas equilibradoras possíveis ante uma perturbação cognitiva, bem como a possibilidade de categorizar de distintas maneiras o suposto desequilíbrio, inclusive ignorá-lo"[27].

7. A Teoria Piagetiana da Equilibração é um modelo evolutivo do progresso cognitivo. Mas isso contradiz outra crença básica de Piaget de que a descrição do progresso cognitivo se dá em termos de uma sequência de estádios. Essa contradição ocorre pelo fato de que um modelo evolutivo assemelha-se a uma árvore ramificada, ao passo que os estádios constituem uma sequência linear[28].

8. A concepção de 'evolução' subjacente à Teoria Piagetiana da Equilibração é estática, uma vez que não sugere a existência de um princípio de mudança além daquele referente ao movimento para uma maior estabilidade entre o organismo e o seu meio. Ocorre que é impossível estabelecer uma comparação direta entre meios biológicos e, além disso, existe uma diferença radical entre aquilo que vem a

[25] (Rotman, B. apud Vuyk, 1985, vol. II, p. 550).
[26] (Rotman, B. apud Vuyk, 1985, vol. II, p. 550).
[27] (Rotman, B. apud Vuyk, 1985, vol. II, p. 550).
[28] (Rotman, B. apud Vuyk, 1985, vol. II, p. 555).

ser o 'meio' na evolução biológica e no desenvolvimento cognitivo. Isso porque, na evolução biológica, o organismo e o meio são entidades separadas, ao passo que, no desenvolvimento cognitivo, o meio é parcialmente construído pelo homem, o que quer dizer que: "uma vez que o meio é, de forma manifesta, o produto de muitas mentes cujo crescimento se define em termos de interação com ele, todo o modelo organismo/meio começa a desintegrar-se"[29].

9. Segundo Rotman[30],

> O modo de Piaget discutir a complexidade crescente das formas evolutivas incorpora dentro de sua teoria certos pressupostos da filosofia do progresso [...] a teoria de Piaget sobre a evolução está tão submetida a certos pressupostos da filosofia do progresso do século XVIII e da filosofia da necessidade do século XIX que sua pretensão de transcender o paradigma neodarwinista não se pode considerar de um modo acrítico.

2.2. O referencial teórico desenvolvido por Jean Piaget e Rolando García na obra *Psicogênese e História da Ciência*

Logo no primeiro parágrafo da introdução dessa obra (Piaget & García, 1982), esses autores enunciam - de forma negativa e mediante a contraposição de seus pontos de vista àqueles que julgam ser os mais correntes e comuns entre os cientistas - duas das teses em favor das quais pretendem argumentar, quais sejam: 1) a da existência, no plano filogenético e/ou psicogenético, de uma relação ou nexo, ainda que parcial, entre a formação do conhecimento nos estádios mais elementares e aquela como ele se constitui nos estádios superiores; 2) a da subordinação da significação epistemológica adquirida por uma idéia, conceito ou estrutura (pelo conhecimento científico de um determinado domínio ou pela perspectiva de conjunto de uma disciplina), nos estádios superiores de seu desenvolvimento, ao modo como essas idéias ou conceitos foram construídos, quer no plano filogenético, quer no psicogenético.

À primeira vista, essas duas teses poderiam parecer muito próximas ou semelhantes. Entretanto, o fato fundamental que os autores pretendem ressaltar com a primeira delas é o da existência de etapas sequenciais e hierárquicas no processo de construção do conhecimento em ambos os níveis, e não meramente o da existência de momentos de avanços ou regressões, de continuidade ou

[29] (Rotman, B. apud Vuyk, 1985, vol. II, p. 555-556).
[30] (Rotman, B. apud Vuyk, 1985, vol. II, p. 556).

descontinuidade ("rupturas epistemológicas") nesse processo, uma vez que, segundo eles, esses últimos elementos estão presentes em todo desenvolvimento do conhecimento[31].

Com a segunda tese, os autores pretendem ressaltar que o desenvolvimento do conhecimento, em ambos os níveis, "resulta da iteração de um mesmo mecanismo, constantemente renovado e ampliado pela alternância de agregados de novos conteúdos e de elaborações de novas formas de estruturas"[32]. Isso significa que, com a segunda tese, pretendem argumentar em favor da existência de um mesmo modo de construção do conhecimento em ambos os níveis, modo este que se repetiria indefinidamente, nível por nível, e que seria passível apenas de renovação e ampliação, mas não de mudança de natureza ou função. Desse modo, a segunda tese, embora diferente da primeira, nada mais faz do que explicá-la, isto é, nada mais faz do que pôr em relevo o duplo fato que estaria na base da explicação das razões pelas quais as construções mais elevadas no plano da construção do conhecimento, tanto na filogênese quanto na psicogênese, permanecem, ainda que parcialmente, solidárias àquelas de níveis mais primitivos: 1) integrações sucessivas de novos conteúdos e de novas formas de estruturas; 2) atuação reiterada de um mesmo mecanismo (ou modo de construção do conhecimento) em níveis diferentes o qual, embora conserve a mesma natureza e função nos diferentes níveis, renova-se devido a essa repetição[33]. Os autores denominam esse mecanismo de *'modo de construção do conhecimento por abstração reflexiva e generalização completiva'*.

A noção de 'abstração reflexiva' fica mais bem caracterizada quando a opomos a outro tipo de abstração denominada empírica. Enquanto que a abstração empírica é o ato mental utilizado pelo sujeito para extrair informações dos objetos e que são propriedades desses mesmos objetos (como, por exemplo, a cor, a massa, o material de que é feito etc.), a abstração reflexiva é o ato mental utilizado pelo sujeito para impor aos objetos ações, operações e propriedades que estes não possuem. A quantidade ou número de elementos de um conjunto, seria um tipo de informação que se obtém via abstração reflexiva, uma vez que, segundo os

[31] (Piaget & García, 1982, p. 15).
[32](Piaget & García, 1982, p.10).
[33](Piaget & García, 1982, p. 10).

construtivistas[34], e para o próprio Piaget, o número não é uma propriedade dos conjuntos, mas uma relação que a mente imporia a dois ou mais conjuntos de objetos quando resolve estabelecer uma correspondência um-a-um entre os seus elementos. A seguinte passagem de Kamii[35] é, a esse respeito, esclarecedora:

> Em contrapartida, a abstração reflexiva envolve a construção de relações entre os objetos. As relações não têm existência na realidade externa. A diferença entre uma ficha e outra não existe *em* uma ficha ou *em* outra, nem em nenhuma outra parte da realidade externa. A relação entre os objetos existe somente nas mentes daqueles que podem criá-la.

Por sua vez, a noção de 'generalização completiva' fica perfeitamente caracterizada por meio da seguinte nota de rodapé extraída do texto em questão dos autores[36]:

> Dizemos que há "generalização completiva" quando uma estrutura, conservando suas características essenciais, se vê enriquecida por novos subsistemas que se agregam sem modificar os precedentes. Por exemplo, a incorporação à Álgebra das álgebras não comutativas que completam as comutativas.

Feitas essas considerações, vamos destacar o modo como os próprios autores esclarecem a sua segunda tese[37]:

> Esta segunda forma de abstração (a abstração reflexiva) tem lugar através de dois processos necessariamente conjugados: 1) um 'ato de se fazer refletir' em um nível superior (por exemplo, em um nível de representação) aquilo que foi extraído de um nível inferior (por exemplo, de um nível de ação); 2) uma 'reflexão' que reconstrói e reorganiza, ampliando-o, aquilo que foi transferido ou refletido anteriormente. O processo de 'reflexão' é duplamente construtivo por duas razões complementares. Em primeiro lugar, porque o ato de se fazer refletir consiste de um processo de estabelecimento de uma correspondência, e o mecanismo assim posto em ação conduz, em um nível superior, a novas correspondências. Estas últimas não apenas associam os conteúdos transferidos a novos conteúdos que são integráveis na estrutura inicial, mas também permitem generalizá-los. Em segundo lugar, estes começos de morfismos conduzem igualmente à descoberta de conteúdos próximos, mas não diretamente assimiláveis, à estrutura precedente: opera-se então uma transformação que, por um processo completivo, chega a integrar a dita estrutura precedente como subestrutura de uma estrutura mais ampla e, por conseguinte, parcialmente nova. Este modo de construção por abstração reflexiva e generalização completiva se repete indefinidamente.

Uma vez explicitada a natureza dos mecanismos que permitem a passagem de uma etapa a outra do processo de construção do conhecimento, os autores enunciam uma terceira, e talvez a mais importante, tese em favor da qual argumentam na obra. Trata-se da tese da existência de duas características

[34]Ver, por exemplo, (Kamii, 1984, p.16).
[35](Kamii, 1984, p.17, grifos da autora).
[36] (Piaget & García, 1982, p. 10).

relativas a esses mecanismos de passagem: 1) cada vez que esses mecanismos promovem uma superação/ultrapassagem para um nível superior, no plano cognitivo, aquilo que foi superado/ultrapassado, de alguma forma, está integrado no elemento superador, isto é, no elemento que permitiu a superação; 2) são esses mecanismos que promovem a passagem do nível intra-objetal (ou de análise dos objetos) ao nível inter-objetal (ou de estudo e análise das relações entre os objetos e das transformações de um objeto em outro), e deste último, ao nível trans-objetal (ou de construção de estruturas)[38].

Podemos, entretanto, fazer algumas considerações críticas a esse referencial teórico desenvolvido por Piaget e García e/ou às suas extensões para o plano da ação pedagógica e/ou da pesquisa em educação matemática.

No meu modo de entender, há um primeiro equívoco: o de identificar 'formas históricas (ou histórico-culturais) de se conceber uma determinada idéia matemática (ou noção ou conceito) - ou, em outras palavas, 'representações históricas' de uma idéia - e 'etapas ou estágios do desenvolvimento histórico' dessa mesma idéia. A ilegitimidade dessa identificação baseia-se no fato de estarem implícitas ou subjacentes à segunda dessas noções, as idéias de 'hierarquia' e 'evolução', o que não ocorre, a meu ver, com a primeira. Além disso, quando se fala em estágios ou etapas, trabalha-se sempre - por mais que isso venha a ser negado - com a suposição tácita de um desenvolvimento já realizado ou terminado, ou então, que tenderia a realizar-se de uma maneira previsível.

Portanto, a concepção etapista no terreno da história das idéias é conivente com as noções de evolução, previsibilidade, hierarquia, legalidade, linearidade e totalidade efetivada.

Há um segundo equívoco: o de julgar que o desenvolvimento cognitivo espontâneo e, por extensão (que não é feita, é claro, pelos autores, mas por educadores e pesquisadores que navegam por esse referencial), a aprendizagem escolar de uma idéia por parte de um indivíduo deveria guiar-se por etapas sucessivas, sendo as posteriores mais complexas do que as antecedentes (ou então, as etapas posteriores dependentes ou subordinadas, de algum modo, às antecedentes). Essa 'concepção burocrática' ou, mais suavemente, 'arquitetônica',

---

[37] (Piaget & García, 1982, p. 10).
[38] (Piaget & García, 1982, p. 33).

do desenvolvimento cognitivo (desenvolvimento este que é sempre social, não importando se recebe ou não a influência do sistema escolar) e/ou da aprendizagem escolar de um indivíduo, pode (e deve), igualmente, ser questionada, pois desconsidera o fato de o desenvolvimento cognitivo (escolarizado ou espontâneo) ser sempre culturalmente/socialmente condicionado, sendo, portanto, moldado pelas 'representações hegemônicas' das idéias e não necessariamente, e simultaneamente, por todas as representações históricas das mesmas. As representações hegemônicas são sempre, e em certo sentido, opções culturais e/ou contextuais feitas com base em certos valores, na maioria das vezes, difusos e inconscientes. Nesse sentido, as etapas se tornam quase sempre descartáveis e desprezíveis à luz da urgência dessas opções. Além disso, se essas supostas etapas fossem necessárias para o desenvolvimento cognitivo, ou para a ocorrência do ensino e da aprendizagem escolar, como explicar o fato de eles continuarem ocorrendo, mesmo quando uma ou mais dessas supostas etapas antecedentes foi marginalizada no processo de ensino-aprendizagem escolar de determinada idéia? A ausência de uma ou mais dessas etapas mostra que o indivíduo pode ser capaz de apropriar-se da idéia, do modo como ela se apresenta na etapa final, sem que seja necessário, para isso, apropriar-se também daquelas outras julgadas a ela antecedentes e necessárias.

Há um terceiro equívoco: o de julgar que haja necessidade (qualquer que seja o fim alegado) de se estabelecer um paralelismo entre as etapas de ambos os tipos de desenvolvimento ou processos. Se um estudante, ou a maior parte deles, tem dificuldade em apropriar-se de determinada idéia, que lhe foi apresentada à luz de determinada representação, isso não se explica pelo fato de que outras etapas do desenvolvimento histórico dessa idéia (ou outras representações dessa mesma idéia) lhe foram sonegadas ou ocultadas, mas porque a 'forma eleita' (ou a 'representação eleita') de lhe apresentar aquela idéia não passou por um tratamento pedagógico adequado, ou então, por razões quaisquer de natureza extraescolar ou extrapedagógica, ligadas ou à condição pessoal do estudante, ou ao seu contexto sociocultural mais amplo etc.

Há um quarto equívoco: o de se pensar que se faz grande avanço em se acrescentar às interpretações históricas não linares que, no terreno da história das idéias, ressaltaram o papel das descontinuidades (como é o caso de Foucault) e/ou das rupturas epistemológicas (como é o caso de Bachelard) outra característica julgada fundamental, qual seja, a da existência de etapas sequenciais e hierárquicas no processo de construção do conhecimento. Isso porque, no meu modo de entender, nem uma nem outra dessas características conseguem atacar em profundidade um dos problemas centrais que perpassa o terreno da história das ideias na atualidade, qual seja, o da natureza da explicação histórica propriamente dita.

Se ter afirmado e defendido, contra o cômodo e harmonioso pressuposto da história contínua, a existência de rupturas epistemológicas, de avanços e recuos e de descontinuidades no processo de produção e circulação das idéias foi de fato um avanço, o desafio imediato que se coloca a toda história construída com base nesse pressuposto alternativo é o de explicar não apenas a natureza dessas descontinuidades e rupturas, como também por que elas ocorrem. Mas, no meu modo de entender, Piaget e García equivocam-se quando pensam que um princípio tão abstrato e internalista como o da atuação reiterada do mecanismo da abstração reflexiva tenha o poder de, por si só, dar mobilidade e circulação ao jogo produtivo das idéias matemáticas e de introduzir as novidades nesse terreno.

Mais do que constituir-se em uma autêntica explicação histórica, o pressuposto da atuação reiterada do mecanismo da abstração reflexiva deveria, ele próprio, receber uma explicação histórica. Dever-se-ia então perguntar: que fatores propriamente históricos poderiam explicar a existência de tal princípio? Por que teria ele a característica de atuar de forma reiterada? Por que teria ele o poder de dar mobilidade às idéias e de criar as novidades no plano da produção do conhecimento? Por que esse princípio divide a história das idéias em exatamente três fases, e não em mais ou em menos fases? Por que essas fases devem ser hierarquizadas? O que atestaria a superioridade da fase trans-objetal em relação às que lhe antecedem? Só colocando-se e tentando-se dar respostas a questões dessa natureza, tal tipo de interpretação poderia aproximar-se daquilo que constitui atualmente a preocupação e a prática efetiva do historiador.

A meu ver, uma história das idéias matemáticas, inteiramente estruturada e internalista, como a proposta por Piaget e García, aproxima-se bastante do tipo de 'história filosófica' inaugurada por Hegel, na qual a um princípio abstrato externo e trans-histórico (isto é, ao qual não é dada qualquer explicação propriamente histórica) - seja ele chamado 'o espírito objetivo', 'o absoluto', 'as leis da lógica dialética', 'os mecanismos mentais de passagem, tais como a abstração reflexiva e a generalização completiva' etc. - e que no caso de Piaget e Garcia nada mais é do que a projeção na filogênese de certos mecanismos e operações mentais reveladas na psicogênese, é dado o poder exclusivo de 'explicar' o complexo e ilegislável processo de produção cultural das idéias. As palavras seguintes de Paul Ricoeur[39] ilustram perfeitamente bem o quão afastado está tal modo de se trabalhar no campo da história das idéias daquele como a maior parte dos historiadores contemporâneos o concebem:

> O que nos parece altamente problemático é o próprio projeto de compor uma história filosófica do mundo que seja definida pela "efetivação do Espírito na história" [...] o que nós abandonamos foi o próprio território. Já não estamos à procura da fórmula na base da qual a história do mundo poderia ser pensada como uma totalidade efetivada.

A 'fórmula' na base da qual a história das idéias matemáticas é pensada por Piaget e Garcia, embora diferente daquela pensada por Imre Lakatos (para quem a 'fórmula' das provas e refutações governaria a produção e o movimento autônomo das idéias matemáticas, constituindo a lógica do processo de descobrimento das mesmas), ou daquela pensada por Bento de Jesus Caraça (para quem a criação de novidades na história da matemática é explicada, ainda que não exclusivamente, com base na 'fórmula' Hegeliana do movimento dialético trifásico que vai da tese à antítese e desta à síntese, devido a um suposto poder criador atribuído à lei da negação da negação), compartilha com estas a mesma crença na existência de um princípio trans-histórico regulador, legislador, disciplinador e direcionador da marcha evolutiva das idéias matemáticas. De fato, que diferenças significativas em relação a um suposto papel explicativo de geração e transformação das idéias teriam as antíteses de Hegel ou de Caraça, os contraexemplos globais e locais ou 'monstros' lakatosianos e os desequilíbrios/conflitos piagetianos? Que diferenças significativas haveria entre as *sínteses* hegelianas ou de Caraça, os *aperfeiçoamentos* lakatosianos das conjecturas e as *acomodações* piagetianas? Que diferenças significativas em relação ao papel desempenhado em supostas passagens a um nível superior do processo evolutivo das idéias matemáticas haveria entre a *lei da negação da negação* de Hegel/Caraça, os *métodos*

[39](Ricoeur apud Chartier, 1990, p. 70).

antimonstros ou de ajustes dos monstros de Lakatos e os *mecanismos de passagem* baseados nas operações mentais de abstração reflexiva e generalização completiva de Piaget e García?

Posto isso, é preciso que se ressalve que as histórias das idéias matemáticas produzidas por Caraça, Lakatos e Piaget & García não são falsas. Tratam-se, na realidade, de histórias redutoras e racionalizadoras, nas quais as idéias são organizadas e ordenadas aprioristicamente para que possam se conformar a uma 'lógica' ou plano racional pré-estabelecidos e aos quais arbitrariamente se atribui o papel de 'elemento explicador' que os 'fatos' históricos viriam a confirmar.

Ainda que essas histórias, ao procurarem pôr em relevo no plano da explicação histórica, o papel desempenhado pelas descontinuidades, pelas contradições, pelos conflitos, pelos avanços e recuos e pelas rupturas epistemológicas, possam, à primeira vista, sugerir que constituam realizações ou concretizações de histórias não lineares das idéias matemáticas, o fato é que isso é feito apenas para que, posteriormente, todas essas anomalias sejam racionalizadas e ordenadas por um princípio regulador/disciplinador trans-histórico e arbitrário, capaz de colocar ordem na desordem, desvelando um suposto modo sempre idêntico de produção e superação dessas anomalias.

Pode-se, portanto, dormir tranquilo e aguardar confiante a chegada do *superman*, isto é, do 'espírito disciplinador e justiceiro' que, certamente, fará com que as idéias rebeldes cumpram o monótono papel que lhes está previamente planejado na peça teatral da evolução bem comportada e sem surpresas do conhecimento matemático.

Em relação a Piaget e García, poder-se-ia levantar o contra-argumento de que eles não são historiadores e de que as teses que intencionam defender não são propriamente históricas, e sim epistemológicas, ou simultanemente epistemológicas e psicológicas. De fato, é o próprio García quem nos faz essa advertência, alertando-nos em relação aos equívocos que a ignorância desse fato poderia gerar. No prefácio, bastante esclarecedor, contido na edição castelhana da *Introduccion a la epistemologia genetica: el pensamiento matemático* de Jean Piaget, escrito em co-autoria com Emilia Ferreiro, García explica-nos que a possibilidade vislumbrada por Piaget de compatibilizar os três métodos complementares em epistemologia genética - quais sejam: 1) o método formalizante (que atacaria os problemas de estrutura formal e de validade dos sistemas de conhecimentos); 2) o método psicogenético (que, contrariamente aos problemas de natureza formal, visaria aos problemas de fato, relativos à caracterização dos diferentes estágios ou níveis de conhecimento e dos mecanismos de passagem de um a outro desses níveis) e; 3) o método histórico-crítico (que atacaria os problemas relativos à reconstituição da história da ciência sobretudo no que se refere à análise dos processos que conduzem de um a outro desses níveis) -, colocaria particularmente, dentre outros, o problema que a nós nos interessa aqui, das relações entre os métodos psicogenético e o histórico-crítico. Assim se pronuncia García[40] a esse respeito:

> Mas as relações entre o método psicogenético e o histórico-crítico têm também dado margem a equívocos sistemáticos. Piaget não pretende explicar a ontogênese a partir da sociogênese do conhecimento, nem o contrário; tampouco pretende sugerir que a ontogênese recapitula a sociogênese. Como explicar então as referências cruzadas, tão frequentes em suas obras epistemológicas, nas quais se confrontam dados relativos à ontogênese do conhecimento com dados relativos à história da ciência? O que interessa a Piaget é (...) encontrar um modelo geral explicativo da passagem de um estado de menor conhecimento a outro de maior conhecimento; as comparações entre ambos os tipos de gêneses apontam para a consideração dos mecanismos gerais de organização, desequilibração e re-equilibração. Por outro lado, a legitimidade da comparação se sustenta na demonstração de uma continuidade entre o conhecimento "natural" ou pré-científico e o conhecimento científico. Finalmente, é preciso recordar que o método psicogenético não é privilegiado de início, mas a justificativa para se recorrer a ele se deve à impossibilidade de se controlar experimentalmente as afirmações relativas à história da ciência e à impossibilidade de se remontar aos estados iniciais que precederam a ciência constituída.

Para reforçar esse ponto de vista, García complementa o seu esclarecimento citando a seguinte passagem, do próprio Piaget[41], extraída do seu livro *Lógica e Conhecimento Científico*:

> Reconstituir o desenvolvimento de um sistema de operações ou de experiências é, antes de tudo, estabelecer a sua história, e os métodos histórico-críticos e sociogenéticos bastariam para se alcançar os fins epistemológicos perseguidos caso pudessem ser completos, isto é, caso pudessem remontar-se anteriormente à história das ciências propriamente dita até à origem coletiva das noções, ou seja, até a sua sociogênese pré-histórica. Pelo fato disso ser impossível, uma vez que as noções científicas foram inicialmente extraídas das noções de senso comum, a pré-história das noções espontâneas e comuns pode continuar sendo, para sempre, por nós desconhecida. É por essa razão, portanto, que se torna conveniente completar o método histórico-crítico com os métodos psicogenéticos.

Claro que, por um lado, não se poderia discordar da natureza das intenções primariamente epistemológicas de Piaget; porém, por outro lado, não se pode

---
[40] (García & Ferreiro, in: Piaget, 1975, p.13-14).
[41] (Piaget, apud García & Ferreiro, in: Piaget, 1975, p.13).

também deixar de relevar que a natureza das teses acima referidas - e em favor das quais os autores pretendem argumentar - os obriga, indiretamente, e ainda que a contragosto, a tornarem-se simultanemente historiadores, epistemólogos e psicólogos.

No que se refere exclusivamente ao papel de historiadores por eles assumido, ao argumento centrado na idéia de que é necessário recorrer ao método psicogenético devido à impossibilidade de se exercer um *controle experimental* das afirmações relativas à história da ciência, e particularmente à história da matemática, poderíamos contrapor a seguinte questão: de onde vem a necessidade de se estabelecer um controle experimental para as afirmações da história? De onde vem a necessidade de os autores se imporem essa obrigação? Menos do que uma 'necessidade', vemos essa 'obrigação' mais como uma *opção*, isto é, como um *pressuposto* de natureza positivista, conscientemente assumido pelos autores, uma vez que essa 'obrigação' só se manifestaria para aqueles historiadores que concebem a história como uma ciência natural, à semelhança da física, da química, da biologia etc.

Mas sabemos hoje que o debate acerca do estatuto da história, que há muito vem sendo travado, tanto no terreno da filosofia da história quanto no da própria história, está longe de chegar a um consenso, se é que um dia possa chegar. As posições dividem-se, inicialmente, entre os que tendem a considerar essa disciplina uma ciência e os que tentam negar à história o estatuto de disciplina científica sob o argumento principal de que o objeto da história, diferentemente do das ciências empíricas, o qual está ligado a fenômenos universais e necessários, diz respeito a tudo que estaria circunscrito à esfera do singular, do irrepetível, do concreto e do contingente. Por outro lado, mesmo dentre aquelas posições favoráveis à história como disciplina científica, as tendências atuais tendem a não assimilá-la às formas de ser das ciências empíricas.

Além disso, não foi o próprio Piaget quem, numa obra denominada *A situação das ciências do homem no sistema das ciências*[42], procedendo a uma classificação das ciências humanas em quatro categorias, reservou às ciências históricas não apenas um lugar distinto daquele reservado às ciências naturais, mas também um lugar distinto daqueles ocupados quer pelas 'ciências nomotéticas', quer pelas 'ciências jurídicas' e quer ainda pelas 'disciplinas filosóficas'? Nesta obra, quando nos atentamos para a maneira como Piaget expressa a distinção entre o que chama 'ciências nomotéticas' e 'ciências jurídicas', salta aos olhos o contraste entre o estatuto atribuído às ciências históricas aí presente e aquele que se manifesta na passagem citada anteriormente. De fato, para Piaget[43], as ciências nomotéticas incluem as disciplinas que

> procuram extrair "leis", no sentido, por vezes, de relações quantitativas de certo modo constantes e exprimíveis sob a forma de funções matemáticas, mas também no sentido de fatos gerais ou de relações ordinais, de análises estruturais etc., que se traduzam por meio da linguagem corrente ou duma linguagem mais ou menos formalizada (lógica, etc.)"[44], ao passo que as ciências jurídicas ocupariam uma posição bastante diferenciada "pelo fato de o direito constituir um sistema de normas e de uma norma se distinguir, no seu próprio princípio, das relações mais ou menos gerais buscadas, sob a designação de "leis", pelas ciências nomotéticas [...] e é próprio de uma norma prescrever certo número de obrigações e de atribuições que permanecem válidas mesmo se o sujeito as viola ou não faz uso delas, enquanto uma lei natural assenta num determinismo causal ou numa distribuição estocástica e o seu valor real advém exclusivamente do seu acordo com os fatos.

Ocupando as ciências históricas, na classificação piagetiana, um lugar diferenciado em relação às nomotéticas e às jurídicas pelo fato de, diferentemente destas, tomar como objeto "todas as manifestações da vida social no decurso do tempo"[45], parece-me incompatível pressupor a necessidade das afirmações nesse terreno terem de ser submetidas a um 'controle experimental'.

O argumento mais óbvio e ao mesmo tempo mais contundente que se poderia contrapor ao segundo argumento apresentado, nas passagens acima, tanto por Piaget quanto por García, de que seria necessário recorrer ao método psicogenético devido à impossibilidade de remontar-se aos estágios iniciais que precederam a ciência constituída, é o de que essa suposta 'impossibilidade' não tem sido sentida por historiadores das mais diferentes tendências que, em nosso século, têm se dedicado a estudos pré-históricos ou que tematizam questões relativas a épocas anteriores ao advento da constituição das ciências, a despeito de todas as dificuldades, sobretudo, aquelas de natureza documental, que se interpõem nesses processos de reconstituição.

---

[42](Piaget, 1970).
[43] (Piaget, 1970, p. 26).
[44](Piaget, 1970, p. 19).
[45](Piaget, 1970, p. 22).

A história das idéias, e particularmente a história das idéias matemáticas, não foge a essa regra. São inúmeros os estudos relativos à matemática pré-euclidiana e mesmo pré-helênica; são também vários os trabalhos de resgate histórico de civilizações antigas nas quais teria predominado uma forma pragmática de se fazer matemática; outros trabalhos procuram compreender e explicar como teria sido possível o surgimento da própria matemática chamada 'teórica' ou 'científica', isto é de uma matemática baseada em princípios, entre os gregos. Esses trabalhos, de inegável cunho científico, bem como aqueles, mais gerais, levados a cabo pelos historiadores não exclusivamente preocupados com o campo da história das idéias, não precisaram aguardar o método histórico-crítico para se constituírem. Acabaram se remontando a esses 'estágios iniciais' armados de outros métodos e recursos advindos de ciências tais como a arqueologia, a etnografia, a química, a linguística etc.

O argumento piagetiano de que a chamada 'pré-história das noções espontâneas' poderia continuar para sempre desconhecida devido ao fato de as noções científicas terem sido inicialmente extraídas das noções de senso comum também não se sustenta. Pelo menos não é isso o que nos têm mostrado trabalhos mais recentes no campo da história da matemática, como, por exemplo, os de Paulus Gerdes, os quais têm penetrado e lançado luz, com o auxílio do método etnográfico, sobre o surgimento histórico de noções geométricas em épocas muito anteriores ao momento de constituição da matemática como disciplina científica.

Penso que a suposta existência de uma linha de continuidade entre as noções espontâneas e as científicas não constitui, mais do que outros, um obstáculo assim tão sério que pudesse impossibilitar ou paralizar o trabalho e a curiosidade do historiador. Além do mais, não nos parece assim tão óbvio, como deixa transparecer Garcia, que tenha sido *demonstrada* a existência de uma continuidade entre o que chama 'conhecimento natural', ou 'pré-científico' e o conhecimento científico. Só para citar um exemplo, na própria noção de *obstáculo epistemológico* desenvolvida por Bachelard parece manifestar-se a tese oposta, uma vez que este autor defendeu ser a *experiência primeira* o primeiro e mais fundamental obstáculo à constituição do pensamento dito científico. Dessa forma, ainda que possa haver continuidade entre a experiência cotidiana e a científica, esta última não se constitui sem algumas rupturas com a primeira. É oportuno ainda levantar as seguintes questões em relação a esse argumento de García:

- Com base em que critérios seria possível demarcar nitidamente, tanto no plano filogenético quanto no psicogenético, o pré-científico do científico?
- Como conceber, a rigor, o que chama de 'conhecimento natural' ou 'pré-científico'? Seria um tipo de conhecimento que independeria de algo como o contexto escolar, a influência dos adultos, a influência do contexto ou de qualquer outra coisa que possa ser esse algo? Qualquer que seja esse 'algo', poder-se-ia contra-argumentar afirmando que nunca existiu um tipo de conhecimento assim, isto é, exclusivamente pessoal, exclusivamente subjetivo, completamente livre de algum tipo de condicionamento a fim de que pudesse ser chamado 'natural'.

Para se tentar melhor entender a que Piaget e García estão se referindo quando utilizam expressões tais como 'conhecimento natural' ou 'conhecimento pré-científico', vamos recorrer a outra passagem, não mais da *Psicogênese*, mas da *Introdução à epistemologia genética: o pensamento matemático*, de Piaget. Nesta passagem, após o esforço feito por Piaget para justificar a necessidade de se complementar o método histórico-crítico com o método genético - com base em uma metáfora biológica[46] que atribui a este último método a função de constituir uma "embriologia mental" -, este autor sente a necessidade de dar um exemplo extraído da história da matemática, mais particularmente da história dos números, para esclarecer este necessário papel complementador do método genético[47]:

---

[46] A fim de justificar o ponto de vista de que o estudo de uma estrutura mental constitui uma forma de anatomia e a análise do funcionamento dessas estruturas uma espécie de fisiologia, a metáfora biológica utilizada por Piaget parte da seguinte pergunta: "Como é que a anatomia comparada efetua as determinações dos planos comuns da organização de "homologias" ou parentescos genéticos de estrutura, etc.? A resposta de Piaget a essa questão é a de que existem dois métodos distintos que orientam constantemente essas determinações, os quais podem ser combinados entre si: "o primeiro consiste em seguir a filiação das estruturas *quando sua continuidade aparece de modo visível nos tipos adultos* [...] Quando há *descontinuidade relativa*, o "princípio das conexões" de Geoffroy Saint-Hilaire permite determinar os órgãos homólogos em função de suas relações com os órgãos vizinhos. Mas esses métodos, fundados no *exame das estruturas já completas*, estão longe de ser suficientes para satisfazer as necessidades da comparação sistemática, porque há *filiações que escapam completamente à análise* devido a uma *carência muito grande de continuidade visível*. Neste caso, impõe-se necessariamente um segundo método: trata-se do "*método "embriológico*" que consiste em estender a comparação aos estágios mais elementares do desenvolvimento ontogenético" (Piaget, 1970, p. 32-33, itálicos nossos). Compare esta citação com a que é feita, logo em seguida, no corpo do texto.

[47] (Piaget, 1970, p. 34, itálicos meus).

> Contudo, dificilmente se obterá, unicamente a partir desta história [Piaget se refere aqui à história feita pelos historiadores das ciências, a qual julga limitada pelo fato de referir-se unicamente às noções construídas e empregadas por um pensamento já constituído, como é o dos cientistas considerados segundo a perspectiva de suas filiações sociais], uma *resposta unívoca* à questão epistemológica central de saber se existe uma *intuição primitiva* do número natural, irredutível à lógica, ou se o número é o resultado de operações mais simples. A razão deste fracasso da investigação histórico-crítica se encontra seguramente no fato de que a estrutura mental daqueles que teorizam acerca do número ser uma *estrutura adulta*, que se remonta de Cantor ou Kronecker a Pitágoras, ao passo que a idéia de quantidade apareceu neles anteriormente a toda reflexão científica: portanto, o que se tem que conhecer é o *estado larvário* da quantidade, isto é, o *estado "nauplio"* [48] que explica o *anafite adulto*[49], e vemos que não resulta demasiado irreverente reclamar aqui a intervenção de uma *embriologia intelectual* por analogia aos métodos da anatomia comparada.

Essa passagem reflete, sem dúvida, a concepção que tem Piaget da história da ciência, e mais particularmente da história da matemática, e das possibilidades desse terreno da investigação histórica. Para ele, reconstituir a história de uma noção matemática, tal como a de número, implicaria efetuar uma análise cronologicamente regressiva das concepções acerca dessa noção defendidas pelos grandes matemáticos que, de algum modo, a tomaram como objeto de investigação.

Mas onde se deteria essa busca regressiva que se iniciaria em Cantor e terminaria (terminaria?) em Pitágoras? Qualquer que fosse a resposta a essa questão visando à busca, na linha do tempo, de pontos cada vez mais anteriores, ela não satisfaria a Piaget. Isso porque, para ele, é sempre um 'adulto sábio' (um *anafite adulto*) que antecede outro 'adulto sábio', e, desse modo, o problema de se saber o modo como essa noção ter-se-ia primitivamente imposto (a tal da *intuição primitiva*) a todo e qualquer adulto sábio de qualquer época, continuaria, para sempre, sem resposta satisfatória.

A meu ver, entretanto, essa impossibilidade só se manifesta porque Piaget biologiza algo que só pode se explicar satisfatoriamente recorrendo-se ao plano sócio-cultural de produção das idéias matemáticas. Penso que o resgate dessa "intuição primitiva", isto é, desse "estado larvário" (ou seja, o estado do 'conhecimento natural' ou 'pré-científico') das idéias, será, sempre e tão somente, a busca e a explicação sempre controvertidas (e para a qual, portanto, nenhuma *resposta unívoca* e consensual poderá ser imaginada) das raízes, difusão,

---

[48] Náuplio: forma larvar comum a todos os crustáceos, com um ocelo mediano e três pares de apêndices.

[49] Anafite: classe de crustáceos cirrópodes fixos.

apropriação e filiações sócio-culturais das idéias matemáticas, para o que nenhum *método embriológico*, nenhuma *embriologia intelectual* poderá se mostrar eficaz. Nesse sentido, o sonho histórico-epistemológico de Piaget pode ser equiparado ao sonho político de Rousseau: à busca, em Rousseau, do 'homem natural', do 'homem livre', isto é, de um homem dessocializado, não submetido aos constrangimentos e condicionamentos - invariavelmente impuros, contaminadores e corruptores - do contexto social, corresponderia, em Piaget, a busca das idéias naturais, das idéias pré-científicas, das intuições primitivas que estariam ocultas em estruturas mentais hierarquizadas, hierarquia esta que deveria, via método genético-embriológico, ser percorrida regressivamente até o *estado nauplio*. Trata-se, desse modo, de uma *história embriológica* das idéias matemáticas, para a qual o contexto sócio-cultural não desempenha nenhum papel significativo.

É plenamente legítima, portanto, a crítica que Rotman[50] dirige a Piaget quando lhe contrapõe o argumento de que

> todo o pensamento humano é composto e é inseparável dos signos que supostamente o expressam, signos que não são fenômenos naturais ou biológicos, mas a construção de distintas culturas em condições históricas e sociais determinadas; e os signos ocorrem em sua forma mais pura dentro da atividade matemática.

Tendo em vista as considerações acima, não vejo por que razões o método psicogenético gozaria de um privilégio especial em relação aos outros para se levar a cabo o empreendimento, com fins epistemológicos, de constituição histórica do desenvolvimento de sistemas de operações ou de experiências.

Penso ainda que os argumentos de Piaget e García não são suficientemente fortes para justificar tal privilégio. A rigor, o método psicogenético poderia, no máximo, ser encarado como um *ponto de referência* para a realização de um tal empreendimento, funcionando mais como uma fonte de levantamento de conjecturas a serem postas à prova com base em métodos propriamente históricos de investigação, mas nunca como um *complemento* a esses métodos propriamente históricos e sociogenéticos como acreditam Piaget e Garcia. Isso porque, ainda que a meta epistemológica seja a de se "*encontrar um modelo geral explicativo da passagem de um estado de menor conhecimento a outro de maior conhecimento*", quando o método psicogenético é posto em ação por Piaget e Garcia, por mais que

---

[50] (Rotman, apud Vuyk, 1985, vol II, p. 401).

reclamem o contrário e rotulem de 'equívocos' os argumentos dos críticos, o que fazem, em última instância, é reduzir a explicação histórica às explicações, dados experimentais e modelos teóricos da psicológica genética. Não se trata simplesmente, portanto, de meras "referências cruzadas" que "apontam para a consideração dos mecanismos gerais de organização, desequilibração e re-equilibração", como acredita García.

Para os objetivos visados nesta investigação e para fundamentar a contraargumentação feita acima, referente ao papel do método psicogenético na pesquisa de natureza histórica, é relevante fornecer aqui um exemplo do modo do método psicogenético operar particularmente no terreno da história da matemática.

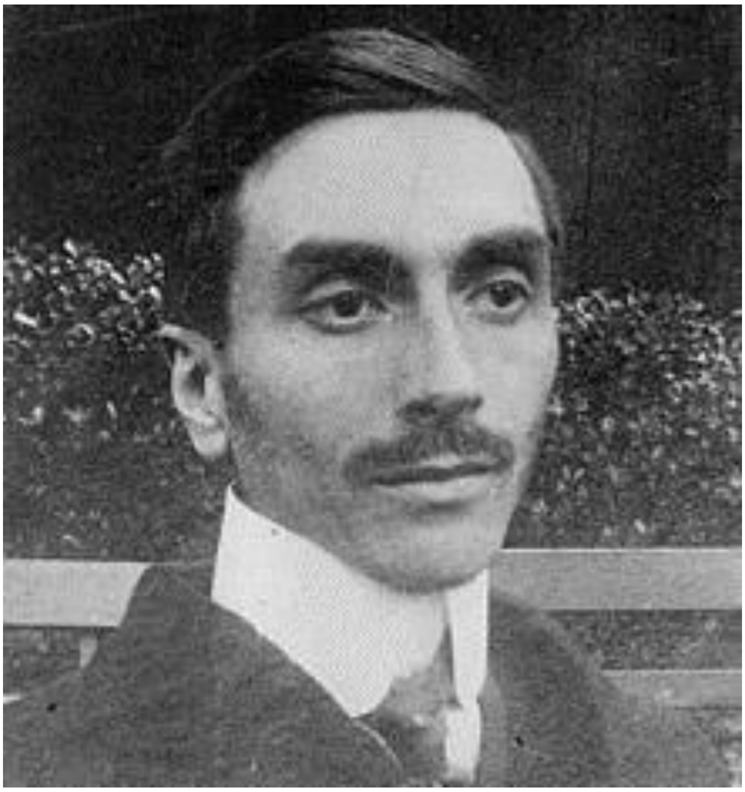
São duas as obras nas quais, em algumas incursões, Piaget se apresenta como historiador da matemática, ainda que, em ambas, as suas intenções sejam epistemológicas.

Uma delas é a obra que vem sendo aqui analisada até agora - *Psicogênese e história da ciência* - escrita em parceria com Rolando García; a outra é *Introdução à epistemologia genética: o pensamento matemático*, publicada originalmente em francês em 1975.

É desta última obra que vou tomar o exemplo, uma vez que a leitura que nela se faz da história da matemática é praticamente a mesma da presente naquela escrita em parceria com García. É nela que se defende, pela primeira vez, a concepção piagetiana do modo trifásico de se subdividir a história da matemática, modo este também presente na obra *Psicogênese e história da ciência.* E é nela também que se pode perceber a fonte na qual Piaget se inspirou para conceber essa subdivisão. Trata-se da obra intitulada *O ideal científico dos matemáticos: na antiguidade e nos tempos modernos*, escrita pelo historiador da matemática - Pierre Boutroux -, na época professor do Collège de France, e publicada originalmente em francês, em 1920, sob o título *L'idéal scientifique des mathématiciens: dans l'antiquité et dans les temps modernes*.

Nesta obra, Boutroux também subdivide a história da matemática em três etapas - a etapa contemplativa, a etapa sintética e a etapa analítica -, segundo o critério dos ideais orientadores da atividade matemática - ou, em outras palavras, das concepções acerca da matemática - que, segundo ele, teriam prevalecido entre os matemáticos em cada uma dessas etapas.

Pierre Boutroux (1880-1922)[51]



Segundo este autor, entre os gregos, teria prevalecido uma "concepção contemplativa" da matemática e a motivação principal que teria orientado a atividade especulativa no terreno da matemática teria sido o ideal da beleza e da harmonia das propriedades numéricas e geométricas. Com Descartes, uma nova forma de se conceber a natureza da verdade matemática teria surgido. Embora para Descartes, tal como para os gregos, a verdade matemática estivesse baseada na idéia de intuição, não se tratava mais de uma intuição contemplativa e sim de uma intuição concebida como poder criador do espírito, uma vez que, à intuição caberia o papel de desarticular ou decompor as totalidades em seus elementos

[51] Matemático e historiador francês da ciência que ocupou temporariamente as cadeiras de matemática e de história das ciências da Universidade de Princeton. O seu pai – Émile Boutroux era filósofo e a sua mãe Aline Catherine Eugénie Poincaré – era irmã do eminente matemático francês do século 19, Henri Poincaré. Suas principais obras foram: L'Imagination et les mathématiques selon Descartes (1900); Sur quelques propriétés des fonctions entières (1903); Oeuvres de Blaise Pascal publiées suivant l'ordre chronologique, avec documents complémentaires, introductions et notes, par Léon Brunschvicg et Pierre Boutroux (1908); Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, professées au Collège de France (1908); Les Principes de l'analyse mathématique, exposé historique et critique (2 volumes, 1914-1919); L'Idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes (1920); Les Mathématiques (1922). Foto e informações: (https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Boutroux).

simples, os quais seriam, por sua vez, recompostos operacionalmente através das ferramentas proporcionadas pela álgebra.

Para Boutroux, a etapa sintética da matemática teria sido, portanto, aquela na qual se constituiu a álgebra como uma ciência teórica, a geometria analítica e o cálculo infinitesimal. Ele inclui também nesta etapa, o desenvolvimento dos números complexos, a descoberta dos grupos de substituição, o surgimento das geometrias não euclidianas e o movimento de constituição da lógica simbólica.

O ideal orientador da atividade matemática nesta etapa teria sido o da construção operatória indefinida e autônoma, uma vez que a matemática teria passado, segundo ele, a ser concebida como uma construção operatória de natureza algébrico-lógica.

A revolução na matemática operada por Evariste Galois teria marcado, para Boutroux, o surgimento da terceira etapa no desenvolvimento histórico da matemática. O que distinguiria essa etapa da anterior teria sido, segundo Boutroux, o desenvolvimento de uma nova consciência em relação ao papel desempenhado pelas operações na prática de investigação matemática.

Contrariamente à primeira etapa, na qual os matemáticos se limitavam a "deduzir", e contrariamente à segunda etapa, na qual os matemáticos supunham ser possível, além de deduzir, também "construir" livremente a matemática em sua totalidade, com base no uso desenfreado da noção de "operação", na terceira etapa, devido à descoberta da existência de totalidades operatórias governadas por suas próprias leis e caracterizadas por certa "objetividade intrínseca", vai-se gradativamente formando a consciência de que essa liberdade não era assim tão irrestrita.

Tendo em vista a formação dessa nova consciência, Boutroux chega à conclusão de que o matemático, em sua atividade, não se limitaria a deduzir e a construir, mas também a realizar "algo mais". Deveria haver um "terceiro ideal" orientador e caracterizador do pensamento matemático, o qual Boutroux não precisa muito bem, mas que poderia ser caracterizado como uma "resistência crescente às sínteses operatórias", e que apontaria, de algum modo, para algo situado "além do domínio das operações".

Para explicar esta resistência que os fatos matemáticos oporiam à vontade do sábio, Boutroux[52] vê-se obrigado a "supor a existência de fatos matemáticos independentes da construção científica"; vê-se forçado a "abribuir uma objetividade verdadeira às noções matemáticas", objetividade que denomina "intrínseca para indicar que ela não se confunde com a objetividade relativa ao conhecimento experimental".

Piaget irá ver com bons olhos essa 'bela' leitura que Boutroux faz da história da matemática. Entretanto, não irá concordar inteiramente com ela. Deverá manter o esquema trifásico proposto por Boutroux; deverá ainda concordar com o modo como Boutroux caracteriza as duas primeiras fases, reinterpretando-as, porém, à luz de um critério que Piaget denomina "*tomada de consciência das operações*".

De fato, em vez de colocar a ênfase, como o faz Boutroux, no aspecto construtivo (em detrimento do aspecto operatório) que envolve o ideal dos matemáticos na segunda fase, Piaget deverá caracterizá-la como a etapa da *tomada de consciência histórica das operações*, e onde Boutroux vê a *presença* caracterizadora dos aspectos contemplativo e dedutivo na primeira etapa histórica da atividade matemática, Piaget[53] vê a *ausência* parcial de tomada de consciência histórica das operações. De fato, em relação a esta primeira fase, assim se expressa Piaget[54]:

> Na matemática dos antigos, o número é uma realidade que existe em si mesma, independentemente das operações que permitem sua formação, e as operações de adição, de duplicação e de divisão ao meio eram por eles consideradas como a expressão das relações que eternamente existem entre os números. Estas relações permitem que o matemático as obtenha e elas correspondem, assim, a um procedimento subjetivo de construção, análogo aos procedimentos que intervêm nas figuras geométricas. Contudo, nem em um caso e nem no outro a operação é considerada construtiva no pleno sentido do termo: é construção sem criação, enquanto atividade do sujeito, e criação sem construção, enquanto relação entre os objetos.

Mas o ponto de divergência principal entre Piaget e Boutroux diz respeito ao modo de se interpretar a terceira fase do desenvolvimento histórico da matemática. Enquanto Boutroux vê nela um momento de "ruptura radical" com a fase anterior, ruptura esta que se manifestaria em termos de resistência dos matemáticos às sínteses operatórias, de um "ultrapassamento das fronteiras do

[52] (Boutroux, 1920, p.203).
[53](Piaget, 1970, p. 249).
[54] (Piaget, 1970, p. 250).

operatório" em direção a uma espécie de domínio "transoperatório" (esse termo não é empregado por Boutroux e sim por Piaget) que Boutroux não chega a vizualizar com clareza, Piaget, ao contrário, a concebe como um momento de "continuidade" em relação à etapa anterior, isto é, como um momento de "manifestação ainda mais decisiva da realidade das operações"[55]. Para explicar esse ponto de vista alternativo que vê continuidade onde se poderia também ver ruptura, Piaget, mais uma vez, invoca a noção de 'tomada de consciência'. Mas se a passagem da etapa um para a dois tinha sido explicada com base na tomada de consciência das operações, que outro tipo de tomada de consciência, capaz de expressar uma manifestação ainda mais decisiva da realidade das operações, deverá ser por ele invocado na passagem da etapa dois para a três?

Trata-se, agora, da "tomada de consciência dos sistemas de conjunto que constituem as operações, isto é, das conexões necessárias entre as transformações operatórias por oposição ao manejo de algumas operações isoladas"[56].

Esse argumento permite a Piaget[57] ver, na terceira etapa proposta por Boutroux, um "prolongamento da atividade construtiva" do pensamento matemático:

> A tomada de consciência [...] constitui em si mesma uma construção: só se toma consciência de um mecanismo interior quando esse mecanismo é reconstruído em uma nova forma que o desenvolve explicitando-o, e quando todo o processo reflexivo é, em si mesmo, acompanhado por um processo construtivo que continua, reconstruindo-o, o mecanismo em relação ao qual se produz uma tomada de consciência.

Uma vez explicitado o ponto de vista de Piaget, devemos nos perguntar qual é a sua intenção em resgatar, reinterpretando-o dessa maneira, o ponto de vista filosófico de Boutroux acerca do desenvolvimento histórico da matemática.

Não resta dúvida que a intenção de Piaget é epistemológica. Pretende com isso mostrar como uma nova leitura - mais original e esclarecedora do que as normalmente feitas - do desenvolvimento histórico da matemática poderia ser proposta e fundamentada à luz da análise de experimentos realizados com crianças da atualidade. Em outras palavras, pretende nos mostrar a eficácia e o poder explicativo do método psicogenético. Só que essa intenção, é claro, nunca aparece

[55] (Piaget, 1970, p. 252).
[56] (Piaget, 1970, p. 253).
[57] (Piaget, 1970, p. 255).

explicitamente nas duas obras a que estamos nos referindo. Além disso, o modo como os diferentes capítulos são ordenados nessas obras acaba sempre sugerindo ao leitor que a análise histórica e/ou epistemológica teria precedido e fornecido elementos explicativos à compreensão da análise psicogenética propriamente dita, quando o contrário é que se passa.

De fato, em *Psicogênese e história da ciência*, o capítulo denominado *O desenvolvimento histórico da geometria* é sucedido imediatamente pelo capítulo denominado *A psicogênese das estruturas geométricas*, e o capítulo seguinte, no qual se propõe uma releitura da história da álgebra, é sucedido imediatamente por outro denominado *A formação dos sistemas pré-algébricos*.

Mas essa ordenação, que poderia levar a equívocos, não consegue ocultar o fato de que, a rigor, teria sido a análise psicogenética que teria conduzido Piaget e Garcia à releitura da história da geometria e da álgebra e não o contrário. A seguinte passagem da *Psicogênese*[58] é esclarecedora a esse respeito:

> As múltiplas investigações que têm sido desenvolvidas há anos sobre o desenvolvimento das operações na criança têm conduzido à distinção de três grandes períodos sucessivos em todos os domínios explorados até agora: um deles, chamado "pré-operatório", no curso do qual se constituem, pouco a pouco, ações repetidas (repetibles) modificadoras dos objetos, mas que não se transformam e nem se coordenam entre si; o segundo, chamado de "operações concretas", no qual essas ações se organizam em sistemas (os agrupamentos) que envolvem certas transformações das operações mesmas; e o terceiro, que é caracterizado por operações hipotético-dedutivas, com sínteses das transformações que podem, em certos casos, tomar a forma de "grupos" [...] resulta claro que estas três etapas [...] correspondem à nossa sucessão intra-, inter- e trans-, como vamos mostrá-lo com exemplos concretos antes de chegar às razões que tornam essa progressão necessária e que justificam o número de três (à maneira da "tese", "antítese" e "síntese" da dialética clássica), em lugar de uma distribuição em um número qualquer.

No caso do livro *Introdução à epistemologia genética: o pensamento matemático*, dentre os três capítulos dedicados ao estudo do pensamento matemático, os dois primeiros são dedicados, respectivamente, à análise de diferentes pontos de vista epistemológicos acerca da construção operatória do número e do espaço. O terceiro também se configura como um capítulo no qual se processa uma abordagem de natureza epistemológica acerca das relações entre o conhecimento matemático e a realidade. É nos dois primeiros subitens desse terceiro capítulo que Piaget realiza, com intenções epistemológicas, é claro, as suas incursões no terreno da história da matemática: no primeiro fornece a sua

[58] (Piaget & García, 1982, p. 163).

interpretação da matemática grega e no segundo da matemática no período moderno.

O aspecto que mais se sobressai na leitura histórica comparativa desses dois períodos feita por Piaget é que é sempre por *insuficiência* em relação à dos modernos que a matemática grega é caracterizada.

De fato, para Piaget, por mais diversificados que tenham sido os problemas levantados e enfrentados pelos matemáticos gregos, o campo de investigação matemática no qual investiram teria sido muito mais limitado do que aquele sobre o qual operaram os matemáticos dos tempos modernos. Isso porque, diferentemente destes últimos, os matemáticos gregos teriam chegado a desenvolver apenas a aritmética, um único tipo de geometria, uma espécie limitada de álgebra (que só utilizava símbolos abreviados para expressar as potências) e uma logística (ou arte de calcular) e geodésia (ou arte de medição geométrica concreta) com fins estritamente utilitários. Além disso, embora Zenão, ao levantar a polêmica em torno de seus paradoxos, tivesse se aproximado do problema referente às séries infinitas, a sua intenção teria sido meramente negativa e crítica, ao passo que, entre os modernos, o infinito desempenharia um papel construtivo; embora Antifón, Eudoxo e Arquimedes, ao desenvolverem o método da exaustão, tivessem se aproximado do Cálculo Infinitesimal, os procedimentos por eles utilizados estavam sempre subordinados ao método geométrico; embora os geômetras gregos conhecessem efetivamente um grande número de curvas, as chamadas 'curvas mecânicas' não chegaram a ser consideradas por Euclides em seus *Elementos*, nos quais apenas as figuras construtíveis mediante régua e compasso são reconhecidas; embora Euclides tivesse feito uso da noção de deslocamento nas decomposições e recomposições de figuras que realiza, inexiste em seus *Elementos* uma teoria do deslocamento; embora os pitagóricos tivessem descoberto os números irracionais mediante a generalização de operações de raiz quadrada, não teriam chegado a estabelecer a legitimidade deste conceito enquanto generalização operatória do conceito de número.

Os exemplos poderiam ser multiplicados. Nossa intenção, porém, é unicamente a de ressaltar que essa *caracterização por insuficiência* não nos parece um procedimento dotado de legitimidade histórica, tendo em vista que, por meio desse mecanismo de comparação das características da matemática de um determinado momento histórico com as da matemática de outra época que lhe antecedeu, nada mais se faz do que projetar indevidamente o presente no passado, ‘acusando’ uma civilização de não ter sido o que uma outra que lhe sucedeu o foi, ou então, cobrando de uma civilização mais do que aquilo que ela de fato realizou ou poderia ter realizado.

Em nenhum momento se pergunta, por exemplo, a respeito das razões pelas quais a matemática grega foi o que foi, isto é, a respeito das razões propriamente sociais dessas *características singulares* assumidas pela matemática grega e das opções que foram feitas, dentre outras possíveis, dentro daquele contexto. Nesse sentido, mostra-se pertinente a crítica que faz Rotman[59] a esse modo ilegítimo do método psicogenético operar no domínio da história das idéias matemáticas:

> A descrição que faz Piaget da história da matemática é totalmente incorreta uma vez que sua análise repousa em uma visão completamente individualista da criatividade matemática que nega qualquer papel sério à linguagem ou ao contexto social do pensamento. [...] Analisando este desenvolvimento só podemos concluir que a história da ciência não mostra um desenvolvimento linear para o progresso, como crê Piaget, mas uma ramificação em várias direções, algumas das quais conquistam esse progresso e outras não. A concepção errônea de Piaget se deve ao fato de que parte do presente, retrocedendo por análise regressiva, o que o leva a fazer uma confusão entre causa e antecedente e, portanto, a esquecer-se de outras possibilidades.

De fato, essa concepção individualista e internalista da história da matemática levará Piaget a afirmar que a esterilidade e a decadência da matemática grega no período alexandrino, após a plenitude atingida anteriormente, não poderia ser explicada pelas circunstâncias sociais, isto é, com base em causas externas, e sim internas. Deverá defender, contrariamente a A. Reymond - que sugeriu, para explicar esse fato, a hipótese do impacto paralizante instaurado pela adoção dos radicais princípios eleáticos subjacentes à uma lógica que, ao renunciar aos conceitos de movimento e de infinito, tornava-se mais exigente do que a nossa -, que tal decadência se explicaria pela adoção de “uma lógica mais limitada que a dos modernos, por ser mais estática e menos apta para assimilar os dados do real, por ser menos conscientemente operatória”[60]. A meu ver, entretanto, o que faz Piaget é contrapor uma explicação internalista a outra igualmente internalista. A questão central, porém, não reside em saber se a lógica dos antigos, comparativamente à dos modernos, era mais ou menos exigente, mais

[59] (Rotman, apud Vuyk, 1985, vol II, p. 401-402).

ou menos limitada, mais ou menos operatória, por tais e tais razões, mas sim em se perguntar sobre que fatores surgidos em que contextos acabaram tornando possível o surgimento dessas lógicas diferenciadas, fazendo com que as mesmas assumissem características e poderes diferenciados, e por que razões a natureza da lógica subjacente à atividade matemática, por si só, a despeito de outros fatores possíveis, teria tido o poder de levá-la à esterilidade e à decadência.

Pôr-se essa questão teria obrigado Piaget, é claro, a suspeitar da possibilidade de influência de outros contextos sociais mais abrangentes sobre a atividade matemática. Mas o método psicogenético-embriológico não se interessa por fatores explicativos dessa natureza. Para atestar essa possibilidade, entretanto, basta, por exemplo, recordarmo-nos aqui da explicação alternativa proposta por Bento de Jesus Caraça[61]:

> Em resumo, ausência de classe social de unificação política, ausência de equilíbrio interior em qualquer das cidades; insuficiências que condenaram a Grécia ao fracionamento político, a que só uma força exterior havia de pôr termo: o imperialismo macedônico primeiro, o imperialismo romano mais tarde. Todo o período que vai do fim da ameaça persa à conquista macedônica - pouco mais dum século - é gasto em lutas das cidades umas com as outras. Cada uma das mais importantes - Atenas, Esparta e Tebas - pretende realizar a unificação política em seu benefício; o imperialismo militar aparece a pretender impor o que uma insuficiência orgânica não permite - o resultado é um afundamento geral [...] Vimos como determinada situação e evolução social da Grécia, do século V para cá, impôs, na superestrutura intelectual dessa sociedade, a adoção de uma corrente de idéias da qual resultaram no domínio da Matemática as consequências principais seguintes: a) incapacidade de conceber o conceito de variável e, portanto, o de função; daí: b) o abandono do estudo quantitativo dos fenômenos naturais e refúgio nas concepções qualitativas; paralelamente: c) primado da figura sobre o número e consequente degradação deste; logo: d) separação da Geometria e da Aritmética [...] e) exclusão, do seio da Geometria, de tudo quanto lembrasse o movimento, o mecânico e o manual: donde: f) um conceito limitado de curva, limitado à reta, circunferência e cônicas; g) tendência para fugir de tudo aquilo que viesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas; em particular, do conceito de infinito [...].

Em vez de explicações dessa natureza, Piaget[62] deverá levantar, a fim de explicar aquilo a que se refere como

> uma das mais interessantes experiências epistemológicas - a história da matemática grega -", a seguinte conjectura: "seu pensamento formal não alcançaria em absoluto o desenvolvimento ilimitado que se poderia esperar por causa deste defeito de tomada de consciência, e, em consequência, devido aos limites impostos pelo realismo nele originado.

---

60 (Piaget, 1970, p. 245).
61 (Caraça, 1978, p.181 e p. 197).
62 (Piaget, 1970, p. 246).

Essa conjectura leva-o então a outra: a de que a suposta supremacia da concepção realista em relação à idealista na matemática grega poderia ser explicada através de mecanismos psíquicos elementares, conjectura esta que Piaget[63] se obriga, portanto, a defender.

É a partir de então que se percebe, com mais clareza, o reducionismo de natureza psicológica de que se reveste a explicação baseada no método psicogenético.

De fato, para argumentar em favor dessa última conjectura, Piaget[64] vai fazer apelo ao conjunto de estudos realizados e resultados obtidos relativos ao desenvolvimento mental da criança:

> o estudo do desenvolvimento mental demonstra, com toda a clareza necessária, não só que a delimitação comumente obtida entre o sujeito e o objeto é essencialmente variável de um nível ao outro, como também que ela depende de um fenômeno constante ou constantemente renovado: a dificuldade para tomar consciência dos mecanismos internos da atividade intelectual, em particular quando estes se apresentam sob formas adquiridas recentemente.

Os aspectos do desenvolvimento mental que serão postos em destaque nessa argumentação dizem respeito ao grau de interiorização do pensamento e ao modo como se estabelecem as relações entre o sujeito e o objeto ao longo do estágio sensório-motor, do das operações concretas e do das operações formais, cujo transcurso seria marcado por um momento inicial de total ausência de consciência e indiferenciação entre o sujeito e o objeto, até um momento final de tomada de consciência e de diferenciação entre sujeito e objeto.

Com essa *argumentação psicogenética*, Piaget[65] acredita ter demonstrado a *tese histórica* que defende uma natureza incompleta, realista e parcialmente consciente do pensamento formal dos gregos:

> A projeção pitagórica dos números inteiros nas coisas pode ser uma herança do nível das operações concretas. Contudo, se nos referirmos às transformações contínuas dos diversos modos de realismo no transcurso dos níveis precedentes, o realismo geral do pensamento dos matemáticos gregos ulteriores, mesmo sendo formal, comporta a mais natural das explicações: ao ser o realismo a expressão de uma indiferenciação entre o sujeito e o objeto e ao efetuar-se a diferenciação entre ambos só de forma progressiva, o sujeito pensante, quando alcança um novo grau de elaboração intelectual, não considera nunca, em um primeiro momento, que atua mediante seu pensamento; ao contrário, antes de apreender reflexivamente os mecanismos, sempre começa por tomar consciência dos resultados desse pensamento. Toda a filosofia do

[63] (Piaget, 1970, p. 246).
[64] (Piaget, 1970, p. 246).
[65] (Piaget, 1970, p. 248).

> conhecimento dos gregos assinala esta primazia do objeto, por oposição ao *cogito* que inaugura a reflexão epistemologica moderna: desde o suposto "materialismo" dos pré-socráticos até a reminiscência platônica das verdades suprasensíveis, desde a lógica ontológica de Aristóteles até a intuição platônica, o pensamento grego sempre considerou que apreendia ou contemplava realidades já constituídas, sem descobrir que operava sobre elas [...] compreende-se, então, a verdadeira causa psicológica do caráter estático do raciocínio matemático grego, inclusive em seus próprios criadores, cujo dinamismo intelectual contrasta de forma tão surpreendente com a imobilidade da visão das coisas a que chegaram.

Ainda que a caracterização filosófica da natureza da matemática grega feita por Piaget possa ser historicamente defensável, a *explicação psicológica* que coloca na base dessa caracterização histórica pode ser completamente questionada. Isso porque, com base no paralelismo ilegítimo e completamente controvertido entre psicogênese e filogênese, no qual a filogenêse é concebida como espelho da psicogênese, a matemática grega é vista como a infância necessária, mas incompleta, da matemática adulta, civilizada e necessária, desenvolvida pelos modernos.

Em outras palavras, os matemáticos gregos passam a ser vistos ilegitimamente como crianças em relação aos adultos contemporâneos; consequentemente, toda a matemática grega passa a ser vista como a infância necessária e lacunar a ser atravessada para a constituição da matemática adulta contemporanea.

Essa transposição ilegítima e arbitrária para o terreno da história das idéias matemáticas do pressuposto ilegítimo - de claras repercussões ideológicas e tantas vezes denunciado por antropólogos, sociólogos e psicólogos - de estabelecimento de paralelismos e analogias entre a infância humana e os estágios primitivos das sociedades humanas, por um lado, e a maturidade humana e os estágios civilizatórios das sociedades humanas por outro, pode ser detectada explicitamente na seguinte passagem de Piaget[66], na qual ele se refere ao duplo avanço (acompanhado de uma espécie de retorno ao realismo) conquistado pelas crianças, em seu desenvolvimento mental, representado pela diferenciação dos significantes coletivos (signos verbais) ou individuais (imagens) e as significações elaboradas graças a esses significantes:

> Desta maneira, *as crianças e os primitivos* imaginam que os números estão nas coisas e apresentam uma existência exterior independente do sujeito que fala (o que determina os tabús ligados a alguns números sagrados, etc.); os sonhos são imagens

[66] (Piaget, 1970, p. 247, itálicos nossos).

> dadas materialmente e que podem ser observadas da mesma forma como se "vê" os objetos; [...]. Em resumo, o sujeito e o objeto são separados de forma diferente do modo como o faz o *adulto civilizado*.

Essa analogia entre filogênese e psicogênese também é vista por Bkouche[67] como duplamente redutora: quer sob o plano da psicogênese, quer sob o da filogênese:

> A analogia piagetiana repousa sobre a hipótese da existência de estruturas psicológicas profundas que regem, via mecanismos de acomodação e assimilação, o ato de conhecer, constituindo o que hoje se chama a *cognição*. O aspecto problemático da construção científica é assim eliminado, reduzindo-se unicamente às interações entre um sujeito cognoscente *objetivado* como conjunto de processos cognitivos e o mundo exterior, sendo o conjunto de processos cognitivos, ele mesmo, organizado pela teoria dos estádios, a qual dá conta da analogia entre a gênese dos conhecimentos no indivíduo e o desenvolvimento histórico da ciência. Desse modo, o sujeito cognoscente deixa de existir enquanto sujeito, pelo menos enquanto sujeito consciente, uma vez que se considera que o sujeito não é mais do que um conjunto de processos em interação com um meio que o rodeia. Analogamente, a história não é mais do que a descrição de um conjunto de interações que conduzirão, mais ou menos necessariamente, ao estado atual dos conhecimentos, o que reenvia a um aspecto teleológico que poderia ser situado na interseção de Hegel e de Darwin. Nesse sentido, a epistemologia genética elimina o sujeito, tanto o sujeito individual quanto o coletivo, mas esse talvez seja o preço a ser pago pelo fato de se querer atribuir à epistemologia o estatuto de cientificidade.

Outro tipo de argumento contrário à leitura piagetiana da história da matemática é o que nos oferece Rotman[68] com base na *natureza social e pública* da constituição das verdades matemáticas, em detrimento à ênfase posta por Piaget, por influência de Kant, no aspecto da *necessidade* que supostamente governaria o curso do processo construtivo interno da matemática pelo sujeito, seguida de uma *descentração necessária* dessa construção individual através da cooperação com outros:

> O erro central do estruturalismo de Piaget é a crença de que é possível explicar a origem e a natureza das matemáticas com independência dos problemas justificativos não estruturais de como se validam as afirmações matemáticas [...] é igualmente razoável supor, com efeito, que a coordenação de pontos de vista é uma questão de argumento explicitamente justificado sobre as entidades públicas, e não, como insiste Piaget, um problema das necessidades internas que operam dentro de uma mente individual.

Seria possível acrescentar ainda mais um argumento bastante esclarecedor de Bkouche[69], contrário a essa forma de inserção piagetiana na história da matemática:

---

[67] (Bkouche, 1997, p. 36-37, itálicos do autor).
[68] (Rotman, apud Vuyk, 1985, vol II, p. 402).
[69] (Bkouche, 1997, p. 38).

> a história é reconstruída em função das necessidades internas da epistemologia genética ao mesmo tempo em que ele explicita uma teoria psicológica do conhecimento que se adapta a esta história reconstruída. Poder-se-ia dizer que é o estado do conhecimento matemático contemporâneo que o força a construir uma história e uma psicologia compatível com esse estado, como se esse estado tivesse necessidade de ser legitimado pelas considerações psicológicas ou epistemológicas.

De tudo o que foi dito, penso, portanto, que o problema não consiste em se negar à psicologia um papel nas análises epistemológicas ou mesmo nas análises históricas e sociológicas; mas a concessão à psicologia desse legítimo papel deveria sempre ser acompanhada da análise reflexiva de outra questão: que papel pode ser esse?

2.3 Descrição e Análise da pesquisa relativa à evolução conceptual da noção matemática de infinito atual desenvolvida por Luis Enrique Moreno Armella & Guillermina Waldegg Casanova[70]

Luis Enrique Moreno Armella[71]

[70] Guillermina Waldegg Casanova é doutora em Ciência e investigadora do Departamento de Matemática Educativa do CINVESTAV – IPN (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional) no México. Fontes: (Fuenlabrada, 2008); (https://www.cinvestav.mx/Portals/0/SiteDocs/Sec_Difusion/Anuarios/2005/invedu.pdf). Não encontramos, na internet, foto acessível de Waldegg.

[71] Luis Enrique Moreno Armella – mestre e doutor em Ciências - é investigador do Departamento de Matemática Educativa do CINVESTAV – IPN (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional) no México.
Acesso informações e foto: (http://www.matedu.cinvestav.mx/lmoreno/presentacion.php); (http://www.cinvestav.mx/); (https://en.wikipedia.org/wiki/CINVESTAV).

No artigo intitulado *A evolução conceptual da noção matemática de infinito atual*, publicado em 1991 na Revista *Educational Studies in Mathematics*, Moreno & Waldegg propõem-se a defender a *tese central* de que o conceito de infinito atual se manifesta, entre os estudantes que cursam o equivalente ao nosso Ensino Médio, no máximo, no mesmo *nível* em que esse conceito é concebido no trabalho intitulado *Os paradoxos do Infinito* de Bernard Bolzano.

Destaquei a palavra *nível* porque o seu emprego por parte dos autores evidencia dois dos pressupostos no qual a investigação se baseia.

O primeiro sugere que os conceitos matemáticos passariam, desde as suas primeiras manifestações históricas, por uma evolução trifásica. A primeira fase ou estágio, denominada "intra-objetal", seria seguida por outra, que lhe seria epistemologicamente superior e denominada "inter-objetal"; esta última seria seguida, por uma terceira e última fase, epistemologicamente superior às duas que lhe antecedem, denominada "trans-objetal".

O segundo pressuposto sugere que também o desenvolvimento conceptual humano (escolarizado ou não?) ou o processo de aprendizagem dos estudantes poderia ser caracterizado como um processo evolutivo que compreenderia as mesmas etapas descritas anteriormente para o desenvolvimento de conceitos matemáticos na história.

O primeiro pressuposto foi originalmente defendido por Piaget & García (1982) na obra intitulada *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Um análogo do segundo pressuposto também foi defendido por esses mesmos autores, nesta mesma obra, com a ressalva de que em nenhum momento é sugerida uma extensão da análise histórico-epistemológica ou histórico-crítica para o terreno pedagógico, particularmente para o terreno da educação matemática escolarizada.

Como os autores argumentam que o trabalho citado de Bolzano poderia ser incluído na etapa um dessa evolução (tese intermediária 1), também o processo de conceptualização dos estudantes investigados apresentaria características intra-objetais.

Além desta tese central, os autores intencionam ainda argumentar que o trabalho desenvolvido pelo matemático alemão Georg Cantor poderia ser incluído na etapa dois do processo histórico-conceptual evolutivo (tese intermediária 2).

Finalmente, os autores acreditam ainda que, à luz das conclusões da investigação, as idéias piagetianas deveriam ser reconsideradas em Educação Matemática.

2. 4. As características do estágio intra-objetal do conceito de comparação entre conjuntos infinitos

Segundo os autores (Moreno & Waldegg, 1991, p. 216), são as seguintes as características do estágio intra-objetal do conceito de comparação entre conjuntos infinitos:

1. "Não operatividade" - A definição da comparação entre conjuntos infinitos não é uma definição operatória, isto é, não permite transformações na medida em que não possibilita - porque não define - obter um conjunto como resultado da operação de dois outros conjuntos infinitos.
2. "Empirismo perceptual" - Com essa palavra-chave ou palavra caracterizadora quer-se significar que, durante esse estágio, os sistemas de verificação empregados pelo sujeito no ato de comparar conjuntos infinitos são majoritariamente empíricos. Com isso, os autores querem dizer que as comparações entre conjuntos infinitos são realizadas pelos sujeitos frequentemente com base nas propriedades ou características geométricas ou perceptuais das figuras. Pode deduzir-se dessa afirmação que os autores parecem utilizar como sinônimas as palavras 'empírico', 'geométrico' e 'perceptual'.
3. "Não conservação" - Com essa palavra-chave ou caracterizadora os autores pretendem significar que, durante esse estágio, não há evidência da presença da noção de conservação (no sentido piagetiano do termo), tanto por parte do sujeito histórico quanto do sujeito psicológico, da quantidade de elementos de um conjunto de pontos. Isso porque, uma figura é vista pelo sujeito como um conjunto de pontos no plano, que não pode ser distorcido ou modificado sem que a quantidade de pontos se altere.
4. "Não transitividade" ou "transitividade limitada" - Os autores querem significar com essa palavra-chave que, durante esse estágio, a relação de comparação entre conjuntos infinitos não goza ainda da propriedade transitiva, ou então, que essa propriedade possui um campo de ação limitado.

2. 3. 2. As características do estágio inter-objetal do conceito de comparação entre conjuntos infinitos

Segundo os autores (Moreno & Waldegg, 1991, p. 218), são as seguintes as características do estágio inter-objetal do conceito de comparação entre conjuntos infinitos:

1. "Reversibilidade" - Com essa palavra-chave os autores querem dizer que tanto as operações realizadas sobre conjuntos infinitos quanto as operações de colocar os elementos de dois conjuntos infinitos em correspondência biunívoca possuem um ponto de partida e um ponto de chegada bem definidos.
2. "Recursividade" - Com essa palavra-chave os autores querem ressaltar a possibilidade de se determinar, por exemplo, o resultado de algo que opera recursivamente sobre um conjunto.
3. "Transitividade" - Com isso querem os autores ressaltar que se é possível definir uma correspondência um-a-um de um conjunto A para um conjunto B e uma outra correspondência da mesma natureza do conjunto B para um conjunto C, então, existe também uma correspondência da mesma natureza do conjunto A para o C.
4. "Associatividade restrita" - Com isso querem ressaltar que a composição de funções bijetoras goza da propriedade associativa.
5. "Comutatividade" - Com isso querem ressaltar que a equipotência entre conjuntos goza da propriedade Comutativa.

2. 3. 3. A descrição da fase experimental da pesquisa: sujeitos e instrumentos

A pesquisa foi realizada em 1988. Participaram do estudo 36 estudantes mexicanos, com idade entre 18 e 20 anos, os quais, no momento de realização da investigação, cursavam o primeiro semestre do ensino superior.

Os instrumentos de pesquisa eram constituídos por três tipos de questionários, os quais foram respondidos por escrito pelos estudantes. Nem todos os estudantes responderam todos os questionários. O primeiro questionário foi respondido por 20 dos 36 estudantes. Os segundo e terceiro questionários foram respondidos por 24 estudantes, sendo que apenas 8 deles também haviam respondido o primeiro.

É necessário observar que tais estudantes, até o momento da aplicação dos questionários, não haviam recebido qualquer tipo de instrução formal, isto é, na escola, sobre tópicos relativos à noção de infinito atual. Nesse sentido, as respostas dos estudantes, segundo os autores, poderiam ser interpretadas como 'espontâneas'.

Ainda segundo eles, a análise das respostas dos estudantes baseou-se mais na natureza dos argumentos apresentados para fundamentarem suas respostas do que no fato de estarem elas corretas ou erradas.

Os autores afirmam ainda que a estrutura dos questionários elaborados é análoga àquela que está presente no artigo de R. Duval[72].

A seguir, teceremos considerações breves sobre esses questionários, os quais aparecem na íntegra no apêndice do artigo dos autores[73].

O questionário I é composto de duas partes. A primeira contém 6 questões, sendo as três últimas do tipo teste com três alternativas: sim, não e não sei. A segunda parte contém mais 6 questões, sendo as duas primeiras do tipo pergunta para as quais se exigem respostas justificadas; as outras 4 questões dessa parte são do tipo teste com três alternativas: sim, não e não sei. O questionário II contém 13 questões, todas do tipo teste com três alternativas. O questionário III contém apenas duas questões do tipo teste com três alternativas. O tema específico abordado em todos os questionários diz respeito, é claro, à comparação entre conjuntos infinitos.

[72] (Duval, 1983).
[73] (Moreno & Waldegg, 1991).

2. 3. 4. Os resultados da fase experimental da pesquisa

Após a aplicação dos questionários, os autores classificaram o total de 220 respostas dos sujeitos de acordo com o tipo de argumentos dados por eles para sustentar suas respostas.

Segundo os autores, esses argumentos foram de 3 tipos. O primeiro ("porque A e B são conjuntos infinitos") era utilizado pelos sujeitos que acreditavam nada poderem afirmar sobre a relação de grandeza existente entre os conjuntos infinitos que estavam sendo comparados; o segundo ("porque B é um subconjunto de A") era utilizado pelos sujeitos que concluíam erroneamente que o conjunto B tinha menos elementos do que o conjunto A; o terceiro ("porque há uma bijeção entre A e B") era utilizado pelos sujeitos que concluíam corretamente que os conjuntos A e B possuíam o mesmo número de elementos.

Tendo em vista essas categorias, os resultados do estudo realizado mostraram que:

1. Dentre os 85 *argumentos úteis* (isto é, que excluem as respostas não-classificáveis nas três categorias acima e a ausência de respostas, o que totaliza 15) apresentados pelos sujeitos no primeiro questionário, 21 deles são de natureza inter-objetal, 38 de natureza intra-objetal e 26 de natureza "pré-intra-objetal" (expressão não utilizada pelos autores, e sim por mim, para referir-se àqueles argumentos que não chegam sequer a atingir o nível intra-objetal);
2. Dentre os 89 argumentos úteis apresentados pelos sujeitos no segundo questionário, 12 são de natureza inter-objetal, 56 de natureza intra-objetal e 21 de natureza pré-intra-objetal;
3. Dos 20 argumentos úteis apresentados pelos sujeitos no terceiro questionário, 18 são de natureza inter-objetal, 1 de natureza intra-objetal e 1 de natureza pré-intra-objetal;
4. Dentre os 194 argumentos úteis (26 argumentos não foram classificados, o que totaliza 220 argumentos) apresentados pelos sujeitos nos três questionários, 51 (23%) são de natureza inter-objetal, 95 (43%) de natureza intra-objetal e 48 (22%) de natureza pré-intra-objetal.

2. 3. 5. As conjecturas subjacentes à elaboração dos questionários

Tendo em vista as diferentes formas como poderíamos interrogar estudantes a respeito de conjuntos infinitos (coisa de que os autores parecem não dar-se conta, uma vez que nada afirmam a respeito dessas variantes), aquela subjacente à elaboração dos questionários reflete, a meu ver, como não poderia deixar de ocorrer, as conjecturas que os autores intencionavam investigar.

A *primeira conjectura* que orientou a elaboração dos questionários foi a crença na existência de um conflito cognitivo entre a construção intelectual de conjuntos infinitos por parte dos estudantes e a experiência concreta dos mesmos com comparação de conjuntos finitos[74]. Aliás, essa crença não só orientou a elaboração do questionário, como também parece ter sido a motivação básica que conduziu o próprio estudo como um todo. De fato, segundo os autores (Moreno & Waldegg, 1991, p. 219), a tensão que o conflito entre a parte e o todo provoca nos estudantes já vinha sendo observada há algum tempo, tanto por eles quanto por outros autores tais como (Fischbein, 1979) e (Duval, 1983).

No caso específico da tarefa de comparação de conjuntos infinitos, nos quais um deles é subconjunto do outro e a possibilidade de estabelecimento de uma correspondência biunívoca entre eles é explicitamente mostrada ao estudante, esse conflito surge no momento em que ele se vê na situação de ter que escolher um critério para realizar essa comparação, o que constitui o ponto operacional central no uso que se faz em matemática da noção de infinito atual.

É por essa razão que os questionários requerem dos sujeitos a comparação de conjuntos infinitos em duas situações diferentes. Na primeira, solicita-se aos estudantes que comparem, sem que lhes sejam fornecidos quaisquer tipos de explicação ou sugestão, a quantidade de elementos de um conjunto infinito com a de um subconjunto próprio desse conjunto (por exemplo, o conjunto dos números naturais com o conjunto de todos os quadrados perfeitos ou com o conjunto de todos os números ímpares).

Na segunda situação, solicita-se novamente que esses mesmos conjuntos voltem a ser comparados, só que, desta vez, os autores, no enunciado da questão, mostram aos estudantes uma forma possível de se estabelecer uma correspondência um-a-um entre os elementos desses conjuntos e a seguir repetem as mesmas perguntas.

É claro que essa dupla apresentação dos mesmos pares de conjuntos aos estudantes só faz sentido quando se é governado pela crença antecipatória de que grande parte deles, senão a totalidade, errará nas respostas das questões referentes à primeira situação; além disso, uma segunda crença antecipatória se acrescenta a essa: a de que ao receberem uma informação que lhes mostre a possibilidade de estabelecer uma correspondência biunívoca entre os conjuntos infinitos dados, grande parte, senão a totalidade, dos estudantes entraria num estado caracterizado pelos autores de "conflito cognitivo", que os obrigaria a rever ou, pelo menos, a pensarem com mais cuidado ao responderem novamente as mesmas questões na segunda situação.

Mas por que razão seria razoável esperar que a situação de conflito cognitivo viesse a se configurar? Segundo os autores, seria razoável esperar que isso acontecesse, pois acreditam que os estudantes tenderiam a tirar conclusões acerca da comparação entre conjuntos infinitos por intermédio de um mecanismo de passagem baseado num raciocínio analógico (com conjuntos finitos) que os conduziria, inevitavelmente, ao erro (não percebido pelos estudantes, é claro) nas respostas às questões da primeira situação.

Ainda que a defesa dessa crença possa apoiar-se em 'evidências' fornecidas por dados empíricos - como, de fato, parece ter ocorrido -, seria oportuno perguntar em que se sustenta a crença dos autores de que essa fé por parte do estudante na infalibilidade do raciocínio analógico constitua um momento natural ou inevitável do processo de construção intelectual de conjuntos infinitos ou de qualquer outro conceito matemático.

Parece-me mais razoável sustentar que essa fé na infalibilidade do raciocínio analógico é muito mais uma fé aprendida no ambiente escolar - devido justamente a uma ausência de trabalho pedagógico crítico sobre os tipos de raciocínios conclusivos e não conclusivos em matemática - do que um mecanismo natural inerente ao processo de construção do conhecimento em geral e no âmbito da escola, em particular. Se assim não fosse, por que razão as duas situações distintas presentes nos questionários não poderiam ter sido apresentadas de

---

[74] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 221).

forma inversa aos estudantes? Por que a informação da possibilidade de comparar conjuntos infinitos mediante o estabelecimento de uma correspondência um-a-um entre os seus elementos não poderia ter sido a primeira coisa apresentada aos estudantes? Ou então, por que não prevenir de antemão os estudantes, fornecendo-lhes exemplos concretos, acerca dos perigos de se tirar conclusões mediante o uso acrítico de raciocínios analógicos? Isto é, porque a explicação pedagógica não poderia ter antecidido a aplicação dos questionários? Não seria porque um tal método alternativo de pesquisa poderia revelar que o conflito cognitivo seria menos um momento natural e necessário do processo de construção intelectual de conjuntos infinitos, ou de qualquer outro conceito matemático, e mais uma decorrência produzida no espaço escolar devido à natureza lacunar, pouco crítica e pouco problematizadora do ensino-aprendizagem da matemática?

Raciocinando inversamente, seria possível perguntar o que, segundo os autores, poderia assegurar que os estudantes, ou grande parte deles, forneceriam respostas corretas a questões relativas à comparação de conjuntos infinitos (isto é, respostas baseadas na aceitação da noção de correspondência biunívoca como o instrumento e critério matematicamente legítimos de comparação entre conjuntos infinitos), não se deixando envolver ou enganar por eventuais situações conflituais - mais imaginárias do que reais - pensadas como inevitáveis pelos pesquisadores?

A resposta que os autores nos fornecem[75] é que a condição necessária, embora não suficiente (pois a suficiência, segundo os autores, só estaria assegurada quando o critério de comparação de conjuntos infinitos não mais se basear na noção de "inclusão", substituindo-a pela de "correspondência"), para a aceitação da legitimidade da noção de correspondência biunívoca por parte dos estudantes estaria baseada em uma determinada "forma de se conceber" conjuntos infinitos, a saber, a "forma sintética".

Esta concepção, segundo eles, se oporia a, em certo sentido, ou, pelo menos, se diferenciaria de outra - por eles denominada "concepção construtivista" (e que, para desfazer malentendidos, vou chamar de *construtivista-intuicionista*) - que se mostraria dominante entre os estudantes da atualidade.

---

[75](Moreno & Waldegg, 1991, p. 219-220).

A *concepção construtivista-intuicionista* de conjuntos infinitos seria aquela que, segundo os autores, estaria baseada num modo característico de se conceber uma coleção contendo um número infinito de 'objetos' (podendo incluir-se entre esses 'objetos', por exemplo, números ou pontos), modo este definido em termos de "regra de geração", o que associa à noção de infinito a idéia de inacabamento, de inesgotabilidade, de impossibilidade de completamento de um processo. Isso caracteriza, é claro, a concepção de *infinito potencial* em oposição à de *infinito atual*.

A *concepção construtivista-intuicionista* de infinito, isto é, a concepção de infinito potencial, manifestou-se no estudo por eles realizado quando, em resposta a questões do tipo "Por que o conjunto dos números naturais é infinito?" ou "Por que o número de pontos de um segmento de reta é infinito?", os estudantes respondiam, respectivamente: "porque cada número natural tem um sucessor" e "porque entre dois pontos há sempre um ponto".

Por sua vez, a *concepção sintética* de infinito argumenta contrariamente ao ponto de vista de que seja necessário percorrer separadamente, ainda que apenas mentalmente, todos os elementos de um todo a fim de constituí-lo. Seria perfeitamente legítimo sustentar que um todo possa ser imaginado ou pensado sem que seja necessário, para isso, construir separadamente uma representação para cada uma de suas partes ou elementos.

Como se vê, a dissonância entre essas duas concepções de infinito está baseada em formas diferenciadas de se conceber a relação entre o todo e suas partes.

Mas por que é exatamente a concepção de infinito que promove ou estimula o surgimento do conflito cognitivo (a concepção construtivista-intuicionista ou de infinito potencial) - e não aquela que teria impedido o seu surgimento e à qual se mostraram presos os estudantes pesquisados (a concepção sintética ou de infinito atual) - a que se mostra dominante ou mesmo exclusiva entre os estudantes? É sobre essa questão-chave que, infelizmente, os autores não se manifestam, porque nem mesmo a colocam para si próprios. Colocá-la e submetê-la à reflexão exigiria que se saísse do âmbito estritamente psicológico (ou, pelo menos, que a cognição fosse concebida menos como um fenômeno de natureza estritamente subjetiva e mais - ou também - como um fenômeno socialmente condicionado) da constatação empírica da manifestação do conflito cognitivo - de cuja manifestação não estamos duvidando -, para se penetrar na fronteira em que a Sociologia do Conhecimento encontra a Psicologia Social, com o objetivo de se tomar como objeto de investigação as representações sociais.

Nesse novo domínio, as perguntas que, dentre outras, se levantariam seriam: por que as pessoas têm as concepções que têm? Por que certas concepções mostram-se dominantes, ou mesmo hegemônicas, em relação a outras? Nesse novo domínio ou referencial não se está motivado a explicar a natureza das concepções que se mostram dominantes - quaisquer que sejam os contextos espacialmente ou temporalmente configurados nos quais se manifestem - com base em uma suposta necessidade ou imperiosidade (biológica, cognitiva, ou de qualquer outra natureza que desconsidere a forma como os homens enquanto produtores de conhecimento, e dotados de intencionalidade, socialmente se relacionam a fim de lidarem com os problemas com os quais se acham envolvidos) de se percorrer etapas fixas, ou fixadas posteriormente mediante análise histórica, de um processo anteriormente vivido e configurado no plano histórico.

Portanto, uma explicação alternativa que se colocaria para o fato de os estudantes da atualidade se mostrarem vítimas de um conflito cognitivo que se expressa com base na não percepção da legitimidade da aceitação da concepção de infinito atual, recai novamente na natureza das nossas tradições pedagógicas em educação matemática e na natureza das tradições e das transmissões culturais que ultrapassam o domínio de uma educação institucionalmente organizada.

Se o estudante da atualidade não se mostra sensível à concepção de infinito que tinha Bolzano ou Cantor, ou se se vê em conflito quando esta lhe é apresentada como legítima, isso não significa que a cognição humana ou que o processo de desenvolvimento conceptual em matemática, fora ou dentro da escola, devesse necessariamente passar por um estágio com características intraobjetais (não-operatividade, empirismo perceptual, não conservação e não transitividade) antes de atingir outro com características interobjetais (reversibilidade, recursividade, transitividade, associatividade e comutatividade). Mesmo porque, a legitimidade da utilização do critério da correspondência biunívoca para a comparação de conjuntos infinitos não poderia ser percebida ou construída espontaneamente pelo estudante - para que pudesse ser ou não aceita - desconhecendo-se os objetivos perseguidos pelos produtores históricos de tal critério ou instrumento cognitivo e a natureza dos problemas que estavam sendo por eles investigados.

Em vez de mecanismos cognitivos naturais, penso que esses instrumentos deveriam ser entendidos, tanto no plano histórico quanto no psicogenético ou pedagógico, como opções - em nada inevitáveis - diante de certos problemas em função das características do problema, das características das alternativas propostas e negociadas em cada momento para se lidar com ele, dos recursos materiais e/ou culturais disponíveis para o seu enfrentamento e das intencionalidades, propósitos e motivações em jogo.

O que geralmente ocorre no contexto do ensino-aprendizagem escolar é o ocultamento (por diversas razões, conscientes ou não, justificáveis ou não), aos estudantes, desse conjunto de circunstâncias que condicionam a produção do saber em geral, e do saber matemático em particular.

Um segundo questionamento poderia ser feito em relação à primeira conjectura que orientou os autores na elaboração dos questionários: em que se sustenta a crença de que a mera informação da possibilidade de se estabelecer uma correspondência um-a-um entre os elementos de dois conjuntos infinitos teria o poder de gerar uma situação de conflito?

Poder-se-ia dizer, é claro, que isso não constituía uma crença *a priori*, mas uma suposição a ser confirmada ou refutada pela análise das respostas dos estudantes.

Nesse caso, pelo menos quatro alternativas legítimas de interpretação das respostas dos sujeitos poderiam apresentar-se: ou se sentiram em conflito e mantiveram respostas dissonantes em ambas as situações por não saberem como superar a contradição; ou se sentiram em conflito e procuraram adequar suas respostas nas duas situações para evitar a contradição; ou não se sentiram em conflito e mantiveram as mesmas respostas nas duas situações, ainda que fossem contraditórias; ou mudaram suas respostas devido a outras razões não geradas pelo conflito cognitivo.

À primeira vista, poder-se-ia pensar que apenas a ocorrência de um dos dois primeiros casos, ou de ambos, poderia sustentar a crença na importância metodológica de se propor situações supostamente conflituais em um questionário, já que, nelas, a situação de conflito desempenha um papel positivo e efetivo. Porém, pelo menos para o caso do questionário II - o único que, a esse respeito, é comentado com mais detalhe -, os próprios autores reconhecem que as respostas dos estudantes acabaram por refutar essa crença. De fato, afirmam eles[76]:

> das 96 respostas dadas, 56 mostram uma concepção segundo a qual as características geométricas das figuras determinam o 'tamanho' dos conjuntos correspondentes, sem permitir a possibilidade de estabelecimento da conservação da quantidade [...] e quando uma bijeção entre os conjuntos tornou-se aparente, os sujeitos simplesmente ignoraram as consequências que esse fato implica como aquela relativa à numerosidade dos conjuntos.

Ademais, se mais da metade das respostas mostraram-se insensíveis à presença de um suposto agente conflitual, grande parte daquelas que, dentre as restantes, atestaram a legitimidade do critério da correspondência biunívoca para a comparação de conjuntos infinitos continuaram não sustentando a conservação da quantidade, o que demonstra insensibilidade à presença de uma inconsistência lógica.

Desses resultados desfavoráveis em relação ao papel positivo e efetivo das situações supostamente conflituais não se pode, porém, retirar a consequência de sua inutilidade ou superfluidade para a elaboração dos questionários; ao contrário, é exatamente essa desfavorabilidade que se transforma em um dos argumentos dos autores para sustentarem a tese central do estudo.

Poderíamos, entretanto, encarar esse argumento da desfavorabilidade de outra maneira, isto é, ele poderia estar demonstrando apenas e tão somente a impotência de situações supostamente conflituais, quer para se provocar o surgimento efetivo do conflito cognitivo no estudante, quer para produzir nele a motivação para a busca do novo conhecimento, quer ainda para a construção efetiva do novo conhecimento; poderia estar demonstrando apenas e tão somente que o conflito residiria mais na mente do pesquisador do que propriamente nas de seus sujeitos de pesquisa, não chegando, porém, a demonstrar que esses sujeitos teriam atingido, no máximo, o estágio inter-objetal do conceito de comparação de conjuntos infinitos, tese que o estudo intenciona defender. Logo, mesmo que o argumento não seja descartável, tampouco chega a ser conclusivo.

---

[76] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 225).

Além disso, poder-se-ia contra-argumentar dizendo que as situações propostas nos questionários, pelo fato de não terem revelado o poder de deflagrar o conflito cognitivo na maioria dos sujeitos, poderiam (ou mesmo deveriam) ter sido reelaboradas a fim de cumprirem, de fato, tal papel. Isso porque, apenas quando cumprissem tal papel as respostas dos sujeitos poderiam, na verdade, ser consideradas significativas, funcionando como um *teste real* para a tese que se intenciona defender. Mas para que pudessem cumprir tal papel as situações, muito provavelmente, teriam que fornecer aos sujeitos informações de natureza histórica que pudessem situá-los compreensivamente no contexto evolutivo da polêmica filosófica em torno da questão do infinito. Só assim, os sujeitos estariam suficientemente informados para poderem conscientemente avaliar e posicionar-se a respeito da legitimidade ou não do uso do critério da correspondência biunívoca na comparação de conjuntos infinitos. Nessas condições, porém, os resultados seriam, muito provavelmente, outros.

De um experimento no qual se solicita aos sujeitos a tomada de decisão acerca da legitimidade do produto sonegando-lhes o processo da polêmica poder-se-ia esperar, no máximo, estar testando a extensão e a qualidade da educação matemática fornecida nas escolas da atualidade; querer ver nele algo além disso, seria exceder-se indevidamente na análise. Mas nesse caso, as etapas pré-intra-objetal, intra-objetal e inter-objetal (os autores não nos dizem o que seria a etapa trans-objetal) do conceito de comparação de conjuntos infinitos, quando empregadas, funcionariam meramente como expedientes classificatórios dos estudantes, mas nunca como etapas verdadeiramente psicogenéticas do desenvolvimento cognitivo ou do desenvolvimento conceptual ou da aprendizagem escolar.

A segunda conjectura que orientou a elaboração dos questionários foi a crença de que as respostas dos estudantes poderiam ser distintas em função do tipo de contexto nos quais os conjuntos infinitos se manifestavam[77].

Foi por essa razão, é claro, que os autores, na elaboração dos questionários, apresentaram os conjuntos infinitos em três contextos distintos: em um contexto aritmético no primeiro questionário, em um contexto geométrico no segundo e, no

[77] (Cf. Moreno & Waldegg, 1991, p. 220).

terceiro, em um contexto misto (aritmético e geométrico) no qual as questões eram apresentadas através de linguagem algébrica.

Exemplo de questão apresentada no contexto aritmético seria a de se solicitar ao estudante a comparação entre a quantidade de elementos dos conjuntos dos números naturais e dos quadrados perfeitos (questionário I).

Exemplo de questão apresentada no contexto geométrico seria a de se solicitar ao estudante a comparação entre a quantidade de pontos existente em dois segmentos de reta, o primeiro medindo 4 cm e o segundo 6 cm (questionário II).

Exemplo de questão apresentada em um contexto misto, acrescido de linguagem algébrica, seria a de se solicitar ao estudante a comparação da quantidade de elementos de dois conjuntos numéricos, agora apresentados sob a forma de intervalos da reta numérica real (questionário III), e entre cujos elementos subsiste uma relação funcional que a cada elemento do primeiro conjunto (o intervalo fechado [0, 1] da reta numérica real, apresentado ao estudante na linguagem algébrica) associa o seu dobro no segundo conjunto (o intervalo fechado [0, 2] da reta numérica real).

Podemos observar pelos resultados do estudo que: 1) os argumentos pré-intra-objetais (que constituem 30,6% dos argumentos úteis no primeiro questionário, 23,6% no segundo e 0,05% no terceiro) ocorrem com mais frequência quando as questões são apresentadas no contexto aritmético do que geométrico e caem abruptamente, a ponto de quase reduzir-se a zero, quando o contexto de apresentação das questões é o misto; 2) inversamente, os argumentos intra-objetais (que constituem 44,8% dos argumentos úteis, no primeiro questionário, 62,9% no segundo e 0,05% no terceiro) ocorrem com mais frequência quando as questões são apresentadas no contexto geométrico do que no aritmético e também reduzem-se a quase zero quando o contexto é misto; 3) os argumentos inter-objetais, por sua vez (que constituem 24,7% dos argumentos úteis no primeiro questionário, 13,5 % no segundo e 90% no terceiro), ocorrem com mais frequência quando as questões são apresentadas no contexto aritmético do que no geométrico e ampliam-se surpreendentemente, atingindo quase a totalidade dos argumentos, no contexto misto.

Como interpretar tais resultados? Os autores os interpretam com base em duas considerações.

A primeira sugere que certos níveis de representação - como, por exemplo, o algébrico - teriam, mais do que outros, o poder de facilitar o acesso do estudante ao estágio inter-objetal[78].

Esse tipo de explicação acaba instaurando uma espécie de hierarquia entre as formas de representação de um conceito. No caso em questão, tendo em vista as frequências percentuais dos argumentos dos alunos, o nível mais baixo dessa hierarquia seria ocupado pelo conceito de comparação de conjuntos infinitos representado em sua forma aritmética, seguido pela representação desse conceito em sua forma geométrica e, finalmente, pelo de sua representação em sua forma algébrica.

Mas o que poderia justificar essa hierarquia, isto é, a que se deveria esse poder de certas formas de representação, em especial o da forma algébrica, sobre outras para o acesso ao nível inter-objetal?

Os autores explicam-no com base no fato de a forma algébrica de representação "permitir a existência de uma operatividade independente de significados"[79].

Apesar do poder investido à forma algébrica de representação, os autores fazem, porém, a ressalva de que uma tal forma apenas ocultaria (não superaria) os paradoxos em que os estudantes se vêem envolvidos quando se defrontam com o problema da comparação de conjuntos infinitos, e, neste sentido, sugerem que novas pesquisas experimentais deveriam ser realizadas a fim de se esclarecer em que medida os estudantes seriam capazes de sustentar as suas crenças/afirmações a despeito das situações paradoxais que elas geram[80].

A segunda consideração feita pelos autores para explicar os resultados sugere que o contexto geométrico, pelo fato de estar baseado na verificação empírica e comportar significações diversas, teria o poder de inibir ou mesmo de impedir o acesso dos estudantes a níveis mais altos de conceptualização, fato este que teria sido confirmado por outro estudo realizado pelos autores no qual "a despeito de instruções prévias sobre conjuntos infinitos, toda vez que o contexto

[78] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 226).
[79] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 226).

geométrico estava envolvido, os estudantes ignoravam a instrução e davam respostas baseadas em suas pré-concepções"[81].

Embora concordemos com o fato de que um conceito matemático possa apresentar-se de várias formas de representação ou contextos e também com o fato de que alguns estudantes possam adquirir, mais do que outros, uma maior facilidade ou mobilidade no interior de uma forma de representação mais do que nas outras, isso não significa que devamos (ou mesmo que possamos) caracterizar, em todas as circunstâncias e de uma vez por todas, certas formas de representação como sendo mais ou menos impeditivas ou mais ou menos permissíveis do que outras para o acesso à construção do modo como um determinado conceito se apresenta em sua formulação mais recente. Isso significa que essa hierarquia de representações revelada pelas respostas dos sujeitos participantes desse estudo não poderia ser generalizada para outros sujeitos ou para outros conceitos matemáticos ou para outros contextos diferentes daquele no qual a pesquisa se realizou, sobretudo para o contexto da ação pedagógica escolarizada.

Ademais, a formulação mais recente (ou mais consensual, na atualidade, para a comunidade matemática) de um conceito matemático sempre se manifesta em um determinado contexto (geralmente o algébrico), tido como mais rigoroso ou mais pertinente do que outros, o que não exclui, é claro, a possibilidade de esse conceito manifestar-se em outros contextos. Nesse sentido, a questão mais interessante que se coloca no plano pedagógico é se a construção de um conceito matemático, por parte de um estudante, poderia revelar-se significativa e sólida, se estivesse centrada exclusivamente numa determinada forma de representação desse conceito em detrimento das outras nas quais ele poderia também se manifestar.

Penso que não, e daí, do fato de as respostas dos sujeitos participantes desse estudo terem revelado uma determinada forma de hierquização das representações não se poderia (ou não se deveria) retirar a implicação de que as formas de representação que ocupam postos mais baixos na hierarquia devessem ser pedagogicamente marginalizadas ou mesmo subestimadas.

---

[80] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 226).
[81] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 226-227).

Mas se, pedagogicamente, todas as formas de representação de um conceito deveriam ser igualmente valorizadas na ação pedagógica, penso que não se torna muito valioso saber que algumas são mais impeditivas ou permissíveis do que outras em uma situação particular e restrita de pesquisa, fora do contexto escolar, que não poderá ser tomada como referência para outras situações, sobretudo para as ações pedagógicas escolarizadas.

A *terceira conjectura* que orientou a elaboração dos questionários foi a crença de que as duas situações distintas de comparação entre conjuntos infinitos apresentadas nos questionários seriam da mesma natureza ou análogas àquelas em que Bolzano e Cantor respectivamente se viram historicamente envolvidos.
Podemos contra-argumentar dizendo que se trataria apenas de uma analogia parcial. Isso porque, o que se fornece aos estudantes nos questionários são apenas questões exclusivamente técnicas relativas a comparações de conjuntos infinitos, deligadas do contexto histórico motivacional que as teria gerado.

Diferentemente dos estudantes, tanto Bolzano quanto Cantor não apenas estavam (*pré)ocupados* com o problema do infinito (e por essa razão também já estavam com ele familiarizados), como também trabalhavam com tal problema, motivados e conscientemente empenhados a resolverem questões que lhes pareceram relevantes no terreno da pesquisa matemática da época.

De fato, como ressaltam os próprios autores[82], quando Bolzano passa a dedicar-se ao estudo do problema do infinito ele não apenas já tinha conhecimento de muitos paradoxos envolvendo essa noção, como também se propõe deliberadamente a enfrentá-los. E não apenas isso, mas o que é mais importante, ele parte para esse enfrentamento orientado por uma conjectura: a de que esses paradoxos eram apenas aparentes, isto é, falsos paradoxos produzidos em virtude da falta de precisão no uso do termo *infinito*. Em função dessa conjectura decide então partir de uma diferenciação terminológica entre as expressões *agregados*, *multitudes* e *conjuntos*.

Do mesmo modo, Cantor passa a (*pré)ocupar-se* com o problema do infinito motivado pelo estudo que estava realizando das séries trigonométricas, orientado pela conjectura de que os conjuntos infinitos de pontos poderiam revelar-se um instrumento importante para a análise do domínio de funções dessa natureza. Em função dessa (*pré)ocupação*, decide engajar-se no projeto de 'dissecar a linha reta', isto é, de entender e revelar a natureza do continuum. Foi essa motivação, associada à essa conjectura, que lhe sugeriu a possibilidade de se realizar, pela primeira vez na história, um certo tipo de operação com conjuntos infinitos, a saber: dado um conjunto de pontos, é sempre possível construir o conjunto de pontos de acumulação a ele associado. Essa possibilidade conduziu-o ao *insight* crucial de que os conjuntos infinitos poderiam ser distinguidos e classificados de acordo com o arranjo de seus elementos[83].

Como se vê, tanto Bolzano quanto Cantor tinham uma intenção, uma pré-ocupação decorrente dessa intenção, uma motivação associada a essa intenção, problemas a serem enfrentados associados a essa intenção, projetos de pesquisa para o enfrentamento desses problemas, conjecturas subjacentes a esses projetos e uma formação matemática que os capacitava a dar encaminhamento adequado a esses projetos.

Vê-se, portanto, quão desiguais em relação àquelas que tinham Bolzando e Cantor, são as condições em que se encontravam os estudantes-sujeitos da pesquisa em foco. Em que se basearia então a suposta analogia referente à terceira conjectura subjacente ao questionário?

2. 3. 6. Comentários sobre as teses intermediárias 1 e 2

Trata-se, segundo os autores, de mostrar que as obras de Bolzano e de Cantor podem ser incluídas, respectivamente, nas etapas intra-objetal e inter-objetal do desenvolvimento histórico do conceito de infinito.

Para argumentar em favor dessas teses intermediárias, os autores submetem a obra desses dois matemáticos a uma análise tendo como referência as características por eles definidas dos estágios intra-objetal e inter-objetal do conceito de comparação entre conjuntos infinitos, as quais já foram explicitadas anteriormente nesta seção.

Os autores partem da constatação de que a noção de infinito se manifestou na cultura grega tanto como um nome quanto como um adjetivo e como um

---

[82](Moreno & Waldegg, 1991, p. 213-214).
[83] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 216).

advérbio, ainda que essa noção, nos dois primeiros casos, só era utilizada em contextos mitológicos, teológicos ou metafísicos.

No contexto matemático propriamente dito, a noção de infinito só aparecia como um advérbio de modo, isto é, para qualificar ações mentais tais como: estender, acrescentar, subdividir, continuar, aproximar etc., nas quais o ponto de partida do processo, diferentemente do ponto de chegada que inexiste, está bem definido[84].

Segundo os autores, o ponto de viragem relativo à noção de infinito, representado pelos trabalhos de Bolzano e Cantor, diz respeito ao fato de que somente com eles essaa noção passa de uma categoria filosófica (relativa ao que poderíamos chamar de *estágio pré-intra-objetal*) à de um objeto matemático propriamente dito (relativa aos estágios *intra-objetal* e *inter-objetal*). Mas que características distintivas estariam ligadas a essa noção em uma e em outra dessas categorias? As duas contraposições seguintes ilustram essa distinção, isto é, a passagem de um estágio pré-intra-objetal a um intra-objetal: 1) o infinito concebido como um conceito em si, isto é, como um substantivo, versus o infinito concebido como um *atributo de uma coleção*, isto é, como um adjetivo; 2) o infinito concebido como uma forma de ação mental que prossegue indefinidamente sobre um objeto conceitual (infinito potencial), isto é, o infinito como advérbio, versus o infinito concebido como auto-reflexividade e correspondência (infinito atual).

Mas se Bolzano e Cantor compartilham a concepção de infinito como um objeto matemático, o que, segundo os autores, os diferencia? Ou, em outras palavras, o que torna o trabalho do primeiro representativo de um estágio intra-objetal e o do segundo de um estágio inter-objetal?

Segundo os autores, Bolzano: chegou a estabelecer uma diferença entre agregados, multitudes e conjuntos; a abandonar a concepção de conjunto enquanto algo resultante de um processo construtivo para aderir a uma concepção sintética que o concebe como um *todo* que pode ser pensado e considerado independentemente de se pensar ou considerar cada elemento desse todo isoladamente; e também, a estabelecer explicitamente critérios para a comparação de conjuntos infinitos.

---

[84] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 212-213).

Embora isso o tenha levado a incluir a noção de infinito em um domínio operacional - exigência básica para tornar essa noção matematicamente manipulável -, isso não o fez ter êxito em seu intento de construir uma aritmética do infinito. Isso porque, dentre os dois critérios de comparação de conjuntos infinitos por ele estabelecidos explicitamente - o de correspondência um-a-um e o baseado na relação de inclusão das partes em um todo -, acabou elegendo apenas o segundo como critério legítimo de comparação, uma vez que, para ele, o primeiro critério não constituía uma justificação da equipotência de conjuntos infinitos.

É exatamente nesse ponto que, segundo os autores, reside uma das diferenças básicas entre o trabalho de Bolzano e o de Cantor (e também, uma das diferenças básicas entre os estágios intra e inter-objetal da noção de infinito): a escolha de Bolzano foi o critério de inclusão, ao passo que a de Cantor foi o de correspondência.

A escolha de Bolzano o fez fracassar em seu projeto de construção de uma aritmética do infinito, ao passo que a de Cantor efetivou, de fato, esse empreendimento. Por que isso teria ocorrido?

Segundo os autores, o fracasso de Bolzano se explica pelo fato de o critério por ele escolhido, diferentemente do de Cantor, não ser um critério operatório, isto é, por não permitir transformações na medida em que não possibilita - porque não define - obter um conjunto como resultado da operação de dois outros conjuntos infinitos. Segundo eles, embora "a abordagem de Bolzano constitua a base da estruturação requerida para a evolução em direção ao nível inter-objetal", apenas a abordagem de Cantor elevou a noção de infinito à posição de "um objeto de estudo com sua própria operatividade"[85].

A meu ver, essa última afirmação dos autores é bastante característica do tipo de pressuposto tácito questionável no qual o referencial teórico de Piaget & Garcia se baseia. De acordo com esse pressuposto, o momento temporal A_1 da evolução histórica de uma teoria matemática (ou de um determinado conceito matemático) – momento este sempre considerado mais complexo do que o que lhe antecede, devido ao fato de ter atingido um caráter operatório -, deve sempre ser antecedido por um momento temporal A_0, menos complexo, por ser de caráter

---

[85] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 216).

geométrico e ainda não operatório, no qual se desenvolveriam pré-condições ou pré-noções exigidas pelo momento posterior A_1.

Desse modo, o etapismo histórico-epistemológico (ou histórico-crítico) que governa a análise de Piaget & Garcia (e também, é claro, dos autores do presente estudo) poderia ser considerado um *evolucionismo epistemológico* (a expressão é minha) baseado na noção de *complexidade estrutural* de uma noção ou de uma teoria. A crença básica que orientaria tal tipo de explicação evolucionista-epistemológica seria a de que, quanto mais complexa uma teoria (ou um conceito, ou uma idéia), mais operatória (e mais exclusivamente dependente da lógica) e menos figural (perceptual ou geométrica) ela é. Em outras palavras, quanto mais estruturada é uma teoria, mais complexa ela é, e quanto mais complexa, pontos mais próximos ao contemporâneo ela atinge na linha do tempo.

Esse evolucionismo epistemológico está baseado, a meu ver, na noção de complexidade absoluta, isto é, na possibilidade de se estabelecer comparações valorativas entre teorias acerca de um mesmo objeto, supostamente válidas para quaisquer contextos temporal e espacial. Tais teorias, ao se suporem exclusivamente epistemológicas, não levam em consideração as condições sociais, políticas, econômicas, culturais etc.

Diante das considerações críticas expostas, vê-se quão problemática torna-se a tese central em favor da qual os autores pretendem argumentar no artigo considerado.

2. 4. Análise da proposta de ação pedagógica desenvolvida por Janet Heine Barnett

A proposta de Janet Heine Barnett, encontra-se na referência[86] e foi apresentada no Congresso História e Educação Matemática ocorrido em Braga - Portugal, no período de 24 a 30 de julho de 1996. O título do artigo que aparece nos Anais desse congresso é *Anomalias e o desenvolvimento da compreensão matemática.*

A *tese central* em favor da qual Barnett argumenta no artigo é a de que a noção de *anomalia* pode ser usada como uma ferramenta para se retirar implicações e/ou recomendações da história da matemática para a educação matemática[87], e que essas recomendações, uma vez levadas em consideração nas aulas de matemática, fariam com que os alunos adquirissem compreensão daquilo que aprendem.

Janet Heine Barnett[88]

Vê-se, portanto, que a noção de *anomalia* funciona como o elo de ligação ou como uma ponte entre a história e a pedagogia, dando, aparentemente e supostamente, legitimidade para a retirada de implicações de um terreno ao outro, isto é, do terreno da história para o da pedagogia, mas não vice-versa. A *anomalia* funciona como o espelho por meio do qual a educação matemática deveria recapitular a história da matemática.

Mas se a noção de anomalia é o espelho que permite estabelecer a ponte entre a história e o ensino é porque, para Barnett, tanto o processo de constituição das idéias matemáticas na história quanto o processo de ensino-aprendizagem damatemática poderiam e deveriam ser vistos e interpretados à luz dessa noção.

De fato, a fim de argumentar em favor desse ponto de vista ela recorre, por um lado a alguns historiadores da matemática, tais como Raymond Louis Wilder[89]

---

[86](Barnett, 1996).
[87](Barnett, 1996, p. 230).
[88] Janet Heine Barnett é professora de Matemáteica do Departamento de Matemática & Física da Universidade Estadual do Colorado (Colorado University State - Pueblo). (http://www.mathpath.org/Faculty&Staff/FACULTY2015.HTM).

(1896-1982) e Michael J. Crowe[90], que compartilham dessa visão e, por outro, a Jean Piaget que, segundo Barnett, teria defendido a crença da existência de um paralelismo entre o modo como os indivíduos constróem o conhecimento matemático e o modo como a humanidade construiu tal conhecimento na história.

Raymond Louis Wilder[91]

Michael J. Crowe[92]

Penso, porém, que interpretar o processo de constituição das idéias matemáticas na história exclusivamente ou mesmo preferencialmente à luz dessa noção, significa privilegiar, voluntária ou involuntariamente, uma abordagem exclusivamente lógico-racional desse processo, tal como o fez Lakatos em seu livro

---

[89] Matemático norte-americano que se especializou no campo da topologia, mas que também investigou a matemática em seus aspectos filosóficos e antropológicos. Em relação a investigações desta última natureza, *The evolution of mathematical concepts. An elementary study*, originalmente publicada em 1969, constitui a sua obra de referência. Outras obras dessa natureza são: Introduction to the foundation of mathematics (1952) e Mathematics as a cultural system (1981). Fonte: (https://pt.wikipedia.org/wiki/Raymond_Louis_Wilder).

[90] Matemático norte-americano que também realizou investigações de natureza filosófica e historiográfica acerca da matemática. O seu *A History of Vector Analysis* (1967) constitui um exemplo de estudo historiográfico realizado por Crowe. Já em relação a investigações de natureza historiográfica, Crowe notabilizou-se internacionalmente com o seu texto breve texto intitulado *Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics* (1975), publicado como um dos capítulos do livro coletivo intitulado *Revolutions in Mathematics*, uma coleção de ensaios em história e filosofia da matemática (Gillies, 1992).
Fontes foto e informações: (https://en.wikipedia.org/wiki/A_History_of_Vector_Analysis); (https://en.wikipedia.org/wiki/Revolutions_in_Mathematics; http://www.lib.uni-bonn.de/PhiMSAMP/Data/Book/PhiMSAMP-bk_FrancoisVanBendegem.pdf).
Gillies, D. (1992). *Revolutions in Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

[91] Acesso foto: (https://pt.wikipedia.org/wiki/Raymond_Louis_Wilder).

[92] Acesso foto: (http://had.aas.org/doggett/2010doggett2crowe.html).

Provas e Refutações, ao pôr em prática aquilo que chamou de *história destilada* ou *reconstrução racional da história* no estudo do teorema de Euler-Descartes.

Isso porque, a meu ver, a noção de 'anomalia' (ou de 'monstro' na linguagem lakatosiana) tende a se aplicar, sobretudo ou exclusivamente, ao modo como as ideias se ligam entre si, à possível e/ou desejável coerência que os protagonistas gostariam de ver entre elas, ao jogo dialético sutil que permeia o seu desenvolvimento. Desse modo, os contextos sociais nos quais se desenrolam as motivações, intenções e ações propriamente humanas, no qual se movimentam os protagonistas, desaparece quase que por completo. As ideias são destacadas desses contextos e se tornam autônomas. Ao adquirirem autonomia, a única alternativa que resta ao historiador, para explicar o modo como essas idéias matemáticas se constituem e se transformam, é a de mostrar como elas se deixam governar por um movimento interno inexorável e inexplicável, baseado numa espécie de dialética hegeliana, ou alguma variante desta, na qual um conjunto bem estabelecido e estável de afirmações ou fatos passa a ser desafiado por outro conjunto inicialmente indesejável de fatos, cujo embate temporário será inevitavelmente sucedido por uma etapa superior de síntese superadora, na qual o equilíbrio, a consistência e a harmonia entre as ideias voltam a ser restabelecidos.

No fundo, trata-se de um mesmo esquema geral explicativo que se aplica quer à análise do processo de constituição histórica das idéias matemáticas, quer à análise do desenvolvimento cognitivo proposto por Piaget em sua Teoria da Equilibração, quer ainda a teorias de aprendizagem da matemática baseadas na noção de conflito cognitivo.

Arrisco-me a afirmar que todas elas, voluntária ou involuntariamente, inspiram-se no modelo darwinista de explicação da origem e desenvolvimento das espécies: a uma luta biológica das espécies, da qual sobreviveriam as mais aptas no modelo darwinista, corresponderia, no plano histórico, uma luta epistemológica das idéias, da qual sobreviveriam aquelas restauradoras da consistência, do equilíbrio e da harmonia (darwinismo histórico-epistemológico).

Retomando o argumento de Wilder, Barnett[93] afirma que

---

[93] (Barnett, 1996, p. 230).

> os paradoxos e as inconsistências são componentes de uma força hereditária, de uma força que se mostra como a mais importante força exercida pela comunidade matemática sobre a mente matemática dos indivíduos .

Como se vê, a impossibilidade de se apresentar uma explicação social para o surgimento dos paradoxos e inconsistências que permeiam a constituição histórica das ideias matemáticas obriga Barnett a pensá-los como componentes de uma difusa *força hereditária*, da qual seríamos todos herdeiros (ou vítimas).

Essa 'explicação', além de pouco explicativa, de pouco convincente, desobriga, desestimula ou mesmo impede que o historiador da matemática se interrogue a respeito dos herdatários. Assim como as espécies herdaram o instinto de luta pela sobrevivência, sem saber que teriam que se confrontar com uma lei natural inexorável que prescreve a sobrevivência dos mais aptos, nós, humanos, teríamos herdado o mandamento de termos que conviver com os paradoxos e inconsistências permeando as idéias matemáticas, sem saber que também herdaríamos como recompensa uma lei (também natural?) que prescreve que eles seriam todos, em algum momento, superados. Pelo menos resta-nos o consolo de termos sido mais afortunados do que as espécies!

Mas que implicações/recomendações para a Educação Matemática são retiradas por Barnett por intermédio da noção de anomalia?

Uma primeira implicação é a de que os estudantes adquirem intuição, e por meio dela compreensão, através da aquisição de experiência e, nesse sentido, o papel do professor seria o de estruturar essas experiências a fim de estimular o desenvolvimento da intuição desejada. Somente após isso o professor pode dirigir a intuição do estudante em direção às definições e teoremas apropriados[94].

É útil ressaltar que por 'experiência' Barnett entende as pesquisas e estudos pessoais exaustivos desenvolvidos pelo estudante no enfrentamento de um problema ou situação desafiadora. A aquisição da intuição por parte do estudante aparece então, para ela, como o produto desse esforço, isto é, como produto dessa experiência.

Barnett utiliza aqui uma concepção de intuição que havia sido desenvolvida anteriormente por Wilder em um artigo denominado *The role of intuition*, publicado em 1967 pela revista *Science*. Nesse artigo, Wilder apresenta uma

[94] (Barnett, 1996, p. 235).

concepção de intuição como "*acumulação de atitudes baseada na experiência*"[95]. Segundo Barnett, essa concepção tem o mérito de captar duas características essenciais dessa noção: 1) a de ser o caminho ou pré-condição que conduz ao pensamento lógico, dedutivo, sistemático, axiomático e rigoroso (é a lógica que se deriva da intuição e não o contrário); 2) a de estar inalienavelmente vinculada à experiência, entendida do modo acima.

Mas devemos nos perguntar que relação essa primeira implicação/recomendação mantém com a história. É que, por intermédio da análise do desenvolvimento histórico de três temas - o das grandezas incomensuráveis, o das geometrias não euclidianas e o da noção de infinito - Barnett conclui que as tentativas empreendidas pelos matemáticos quando se defrontam com anomalias em seu trabalho, frequentemente os levam ao desenvolvimento de novas intuições que acabam transformando os tais paradoxos em meras curiosidades[96]. Desse modo, idéias vistas como inconsistentes e paradoxais por gerações passadas acabam se transformando em fatos corriqueiros e completamente aceitáveis pelas novas gerações. Como se explica essa transformação? Para Barnett, essa transformação se opera devido ao fato de que "as nossas intuições sobre os conceitos em questão diferem das intuições de gerações passadas"[97].

Devido à sua obviedade, essa 'explicação' nos parece, na verdade, pouco explicativa. Soa tão óbvia como afirmar, por exemplo, que os costumes, os problemas, as concepções, as visões de mundo etc. de gerações passadas diferiam dos da nossa. Penso, porém, que a verdadeira questão a ser enfrentada, e que Barnett não coloca a si própria, seria a de se perguntar por que razões as intuições de gerações passadas sobre os conceitos matemáticos diferiram das intuições da geração contemporânea.

A meu ver, a explicação ou pseudoexplicação baseada na noção de intuição a que recorre Barnett, psicologiza um problema que, em última instância, só pode explicar-se sociologicamente. Isso porque, as ideias vistas momentaneamente como inconsistentes e paradoxais pelas gerações passadas são, num curto período de tempo, conciliadas a fim de que se conformem às opções, valores, finalidades e

---

[95] (apud Barnett, 1996, p. 234).
[96](Barnett, 1996, p. 234).

interesses (científicos, epistemológicos, políticos, ideológicos etc.) dos grupos detentores de mais poder no interior das comunidades científicas de cada época. Para serem conciliadas e passarem a ser vistas como 'normais', como 'meras curiosidades', essas ideias não precisam aguardar no tempo o surgimento de gerações 'mais esclarecidas' e matematicamente mais preparadas. Nesses casos, o que as novas gerações fazem em relação ao trabalho das antigas é - em função de novos interesses, novas finalidades e novos valores - proporem novas formas de se conciliar os mesmos paradoxos, apresentando novas opções de ver, enfrentar e superar o mesmo tipo de problema.

Seria ilegítimo, no meu modo de entender, a tentativa de comparar e hierarquizar essas diferentes opções e formas de superação, uma vez que todo trabalho dessa natureza acaba, sempre e invariavelmente, valorizando unilateralmente as opções contemporâneas em detrimento das que lhe são temporalmente antecedentes, compactuando dessa forma com o pressuposto do evolucionismo conceitual e epistemológico no terreno da história das idéias e, particularmente, no da história das idéias matemáticas.

Nesse sentido, penso que não existiria uma melhor solução, ou mesmo uma solução definitiva, para uma anomalia. É por essa razão que cada geração, ou cada comunidade de cientistas de cada época, sempre pensa ter superado satisfatoriamente as anamolias com as quais se depara. É por essa razão também que cada nova geração encara essas superações como superações possíveis mas não necessárias.

Uma segunda implicação[98] é que

> o processo de formação de conceitos pode ser intensificado pela presença de anomalias no processo de compreensão individual (...) embora a criação de confusão pareça ir de encontro ao papel do professor, tanto a história quanto a psicologia sugerem que os estudantes podem beneficiar-se quando se defrontam com anomalias.

Como se vê, a sustentação para essa crença Barnett vai buscá-la em em dois terrenos: no da história e no da psicologia. No primeiro caso, a análise feita do desenvolvimento histórico dos temas acima referidos é suficiente para convencê-la de que "a presença de anomalias na matemática parece estimular, mais do que

[97] (Barnett, 1996, p. 234).
[98] (Barnett, 1996, p. 235).

inibir, o crescimento da matemática”[99], tendo em vista que os esforços feitos no sentido de superação das anomalias percebidas acabam gerando novos conceitos ou impondo a necessidade de se reconstruir antigos conceitos, e também, muitas vezes, estimulando o surgimento e aceitação de novos padrões de rigor em matemática.

Dessa forma, a passagem do plano histórico para o psicológico e pedagógico é vista como automática, direta, não problemática: se as anomalias desempenham um papel quase sempre estimulador no plano histórico, certamente deverão também desempenhar esse mesmo papel nos planos psicológico e pedagógico.

Um dos pressupostos tácitos questionáveis em que se baseia a crença na afirmação desse paralelismo é o de que as anomalias sempre deverão desempenhar um papel positivo no processo de ensino-aprendizagem da matemática, não importando quão distantes no tempo e no espaço estejam as diferentes gerações de aprendizes, e nem tampouco as condições contextuais diferenciadas sob as quais ocorreram e deverão ocorrer os processos de apropriação do conhecimento matemático.

Outro pressuposto tácito igualmente questionável é o de que as comunidades de aprendizes de matemática de cada época e local são equiparáveis a comunidades de produtores de conhecimento matemático de outras épocas que lhes antecederam e de outros locais que não os seus.

Acreditar nesse pressuposto significa incorrer na dupla impropriedade de se equiparar em termos de recursos culturais, mentais e psicológicos os sábios e/ou as comunidades de cientistas profissionais de épocas passadas com crianças e jovens de gerações posteriores, e crianças e jovens de épocas determinadas a sábios ou a comunidades de cientistas profissionais que lhes antecederam no tempo.

Em cada um desses casos não se consegue escapar do erro de se infantilizar os sábios-profissionais e o universo no qual se movimentam ou de se genializar e tornar adultos as crianças e o universo no qual se movimentam ou, em uma palavra, de se confundir e de se tornar intercambiáveis uma comunidade profissional de adultos socialmente intencionados e preparados para se produzir conhecimentos e uma comunidade não-profissional de crianças e jovens cujas ligações e pretensões em relação à esfera do conhecimento são de outra natureza.

[99](Barnett, 1996, p. 235).

A outra sustentação para a crença expressa nessa segunda implicação Barnett vai buscá-la no terreno da psicologia, mais especificamente, na teoria Piagetiana da Equilibração, ao afirmar que a defesa do ponto de vista[100] da necessidade de se trabalhar com anomalias no plano pedagógico

> é consistente com a teoria Piagetiana da aprendizagem a qual se baseia na hipótese de que aprendizagem ocorre quando os esquemas cognitivos são transformados pelos processos de assimilação e acomodação.

Desse modo, continua Barnett[101],

> devido à natureza auto-preservadora dos esquemas cognitivos, o indivíduo resistirá às modificações do mesmo modo como os matemáticos resistiram a mudanças em seus esquemas compartilhados envolvendo as noções de número, medida e infinito. Especialmente no caso de acomodação, a qual exige re-estruturação significativa dos esquemas cognitivos, a resistência individual é tão forte que o encontro com uma anomalia é considerado necessário para motivar a mudança.

Nesta passagem, constata-se novamente a passagem imprudente e ilegítima do plano histórico para o psicológico, através da sutil equiparação, por um lado entre 'esquemas cognitivos do indivíduo em formação' e 'esquemas compartilhados por uma comunidade profissional adulta', e por outro, entre 'resistência individual a mudanças no plano da cognição' e 'resistência coletiva a mudanças no plano da construção social do conhecimento'. Novamente Barnett incorre no erro de equiparar, assimilando-os uns aos outros, fatos psicológicos, nos quais o grau de subjetividade e liberdade é quase que irrestrito, e fatos sociológicos, nos quais o grau de subjetividade e liberdade se vê restringido por constrangimentos e negociações sociais de outra natureza (políticos, epistemológicos, culturais etc), isto é, incorre no erro de equiparar, assimilando-as umas às outras, as formas de comportamento de um indivíduo em sua vida privada e as formas de comportamento de uma comunidade específica e especializada em sua vida pública.

Uma terceira implicação[102] é a de que

> o trabalho cooperativo e a discussão não são suficientes para a construção da compreensão individual, sugestão esta que vem sendo confirmada por pesquisas educacionais. Para o professor isto sugere que propiciar oportunidades efetivas tanto para as discussões em grupo quanto para a reflexão individual é essencial para o desenvolvimento da compreensão individual.

---

[100] (Barnett, 1996, p. 235).
[101] (Barnett, 1996, p. 235).
[102] (Barnett, 1996, p. 236).

Em relação a essa terceira e última implicação, não estamos preocupados aqui com o fato de ser ela uma sugestão interessante ou não para a ação pedagógica, de ser ela confirmada ou não pelas pesquisas contemporâneas, mas tão somente destacar o modo como Barnett a entende como uma implicação da história para a pedagogia da matemática e avaliar quão legítima ela seria. Nesse sentido, o argumento histórico colocado por Barnett para sustentar essa sugestão ou recomendação pedagógica baseia-se no exemplo localizado do desenvolvimento histórico das geometrias não-euclidianas, no qual os matemáticos Bolyai e Lobatchevsky, mesmo estando ambos conscientes e, em certo sentido, inseridos no processo da tradição matemática, teriam sido auxiliados a quebrar ou romper com a visão tradicional da geometria euclidiana como verdade absoluta pelo fato de estarem relativamente isolados dos principais círculos de produção matemática da época[103].

À luz dessa explicação histórica questionável das realizações dos matemáticos envolvidos, Barnett acredita poder retirar para a época atual a lição pedagógica de que o trabalho de reflexão individual é tão importante quanto o coletivo no plano da construção individual compreensiva do conhecimento matemático.

Ainda que seja possível polemizar com Barnett no que se refere ao suposto benefício proporcionado por esse suposto isolamento de Bolyai e Lobatchevsky, mostrando, ao contrário, que o contexto no qual trabalharam esses dois matemáticos, longe de estar, na época, isolado do circuito da produção matemática de ponta, oferecia adicionalmente condições singulares favoráveis ao florescimento de suas idéias inovadoras, o contra-argumento principal que se coloca neste caso continua sendo o da ilegitimidade de se transpor, por analogia, normas ou formas de comportamento do plano histórico para o psicológico e/ou educacional com base na equiparação inadmissível entre adultos de determinada época e contexto - profissionalmente envolvidos e pré-ocupados com determinados problemas e por determinadas razões - e crianças e jovens de outra época e contexto, não pré-ocupados com esses mesmos problemas e pelas mesmas razões.

---

[103] (Barnett, 1996, p. 236).

2. 5. Comentários acerca do relato de pesquisa de autoria de Luis Moreno

O relato de pesquisa elaborado por Luis Moreno, pesquisador do Cinvestav - IPN - México, encontra-se na referência (Moreno, 1996) e foi apresentado no Congresso História e Educação Matemática ocorrido em Braga - Portugal, no período de 24 a 30 de julho de 1996.

Esse relato/reflexão aparece nos Anais desse congresso sob o título *Calculo: História e Cognição*. A tese central em favor da qual Moreno procura argumentar nesse artigo é a da existência, tanto no plano filogenético quanto no psicogenético, de mecanismos de passagem de um nível de menor organização do conhecimento matemático para um outro de maior organização.

Ainda que Moreno, neste trabalho, não se refira a esses níveis como etapas intra-objetal, inter-objetal e trans-objetal, é claro que sua tese está fortemente inspirada no trabalho de Piaget & García[104], uma vez que o que estes últimos autores pretenderam defender nesta obra citada foi que aquilo que se conservaria, tanto na filogênese como na psicogênese, seriam, não conteúdos específicos como acreditavam os antigos defensores do chamado princípio genético, mas instrumentos e mecanismos mentais de passagem de uma a outra dessas etapas.

De fato, logo na introdução da obra *Psicogênese e história da ciência* são os próprios autores que nos chamam a atenção para este fato da seguinte maneira[105]:

> nosso objetivo não é, de modo algum, pôr em correspondência as sucessões de natureza histórica com aquelas reveladas pela análise psicogenética, destacando os conteúdos.Trata-se, pelo contrário, de um objetivo inteiramente diferente: mostrar que os mecanismos de passagem de um período histórico ao seguinte são análogos aos mecanismos de passagem de um estágio psicogenético ao seguinte.

Mas que mecanismos de passagem seriam esses a que Piaget e García se referem? Trata-se, na opinião desses autores, da conservação, em ambos os domínios, isto é, no da filogênese e no da psicogênese, de coisas do tipo: natureza dos raciocínios empregados; observação inferencial dos objetos, isto é, observação não-neutra ou interpretativa dos objetos por parte dos sujeitos; processos de diferenciações e integrações que permeiam todo o progresso cognitivo; busca das

[104] Piaget & García (1982).
[105] (Piaget & García, 1982, p. 33).

razões dos êxitos e dos fracassos no processo de construção do conhecimento e ordem das etapas dos progressos cognitivos.

No caso particular desta pesquisa realizada por Moreno, os mecanismos de passagem que, segundo ele, estariam sendo conservados em ambos os domínios restringir-se-iam aos raciocínios empregados, nomeadamente a abstração (empírica e reflexiva) e a generalização (extensiva e completiva).

Além disso, Moreno utiliza uma linguagem pessoal para referir-se aos níveis de menor e maior organização do conhecimento matemático. Denomina os níveis de menor e maior organização do conhecimento matemático de *concepções* e *conceitos formais* respectivamente e parte do pressuposto de que entre as estruturas cognitivas das concepções e as estruturas cognitivas conceituais (estruturas lógicas) interpor-se-ia um outro tipo de estrutura cognitiva mediadora ou intermediadora a que denomina *organizações locais*.

A fim de tornar mais claro o que o autor está entendendo por uma *organização local*, vamos reproduzir aqui o exemplo, extraído da história do cálculo, que ele nos apresenta em seu artigo[106].

Segundo ele, no contexto histórico do cálculo diferencial, para que fosse possível chegar a uma compreensão satisfatória da noção de reta tangente, mostrou-se necessário, a partir de certo momento, uma *organização local* dessa noção que incluia: 1) uma curva representada por uma equação; 2) um campo operacional que consistia essencialmente em 'derivar' a equação (isto é, de encontrar a tangente em um ponto particular da curva) e igualar essa derivada a zero.

Essa *organização local* está ancorada no contexto da geometria analítica e, por essa razão, proporciona uma nova forma de representação desse objeto geométrico que generaliza o problema do traçado de tangentes a curvas. Segundo o autor, embora nesse momento ainda não se tivesse disponível uma definição rigorosa de derivada, isso não constituiu um obstáculo para se começar a explorar a noção de tangente em termos bastante gerais.

Vê-se, desse modo, e para esse caso específico, que após uma *concepção* de tangente exclusivamente pertencente ao domínio da geometria sintética, antes de se atingir o *conceito formal* de tangente, essa noção teria passado por uma *organização local* ancorada no contexto da geometria analítica, *mediadora* entre a *concepção* inicial e o *conceito formal*.

Essas etapas - que são evidentemente análogas às etapas intra, inter e trans-objetal de Piaget e García e que poderiam, a meu ver, ser intercambiadas com elas sem maiores problemas -, segundo o autor, estariam presentes não apenas na filogênese dessa noção, como também em sua psicogênese.

De fato, embora o exemplo tenha sido extraído do contexto histórico do cálculo diferencial, logo em seguida, o autor nos fornece o seu correspondente no plano psicogenético[107]:

> É preciso mencionar que os estudantes não têm problemas em aceitar a predição que pode ser feita sobre a reta tangente quando esta é traçada por um ponto convexo; os problemas aparecem quando a tangente é traçada por um ponto de inflexão. Como pode, neste caso, a tangente intersectar a curva? A contradição que os estudantes percebem entre aquilo que as organizações locais predizem e a concepção geométrica de tangente que possuem, é superada quando eles finalmente mudam essa concepção restritiva. Agora, o aparato analítico dá conta das situações mais gerais. A tensão entre concepção e operação dentro de uma organização local, é reforçada pela independência que o campo operacional eventualmente adquire da concepção que originariamente o acompanhava.

Torna-se ainda mais explícito o referencial teórico piagetiano no qual a pesquisa se processa quando Moreno nos mostra a possibilidade de se expressar a explicação acima nos termos da Teoria Piagetiana da Equilibração[108]:

> O processo pelo qual uma organização local é refinada pode ser descrito, em princípio, em termos de *assimilações e acomodações*. Por exemplo, quando se tenta calcular a tangente por um ponto de inflexão de uma curva, surge uma contradição entre aquilo que o campo operacional prediz e concepção original de tangente por um ponto convexo. Então, a fim de que a organização local (uma estrutura cognitiva) possa *assimilar* a nova situação, a concepção de tangente deve ser modificada; isto é, uma *acomodação* da estrutura cognitiva é produzida [...] o resultado é uma nova e mais equilibrada estrutura cognitiva.

Uma vez tornado explícito o referencial teórico no qual se movimenta o autor, podemos, utilizando a sua terminologia pessoal, re-enunciar a sua tese central do seguinte modo: Tanto a filogênese quanto a psicogênese de um determinado tópico matemático específico ilustra a transição das concepções aos conceitos através dos mesmos mecanismos de passagem. De que modo o autor argumenta em favor dessa tese?

---

[106] (Moreno, 1996, p. 294).
[107] (Moreno, 1996, p. 295).
[108] (Moreno, 1996, p. 295, itálicos do autor).

Antes de mais nada, o tópico matemático específico por ele eleito é o cálculo diferencial e integral, e toda a sua argumentação, feita à luz do referencial piagetiano, baseia-se no confronto entre a sua interpretação histórica do desenvolvimento do cálculo e a discussão de alguns resultados experimentais obtidos mediante a análise das respostas dadas em questionários por 100 estudantes - metade deles cursando o equivalente aos três últimos anos de nosso ensino médio, e a outra metade cursando o primeiro ano da universidade - que já tinham passado por um curso de cálculo. Três experimentos são relatados por Moreno no artigo em foco.

2. 5. 1. O primeiro experimento

O objetivo do primeiro experimento era o de explorar a concepção de limite entre os estudantes e, para isso, solicitava-se deles a resposta à seguinte questão: *0,999... é menor do que ou igual a 1?*

As respostas mais frequentes dadas pelos estudantes foram as seguintes: 1) 0,999... é igual a 1 porque a diferença entre eles é infinitamente pequena; 2) 0, 999...é igual a 1 porque, no infinito, eles estão tão perto um do outro que eles podem ser considerados iguais; 3) 0,999... é menor do que 1, embora a diferença entre eles seja infinitamente pequena; 4) 0,999... é menor do que 1, mas é o número mais próximo possível de 1 sem ser 1.

Essas respostas, em vez de serem categoricamente classificadas como incorretas, foram consideradas reveladoras de uma fase de organização local, ancorada à noção de elementos infinitesimais ou de infinitésimo, pela qual a noção de limite estaria passando entre os estudantes. Isso, segundo o autor, seria de se esperar tendo em vista que também no plano histórico ou filogenético essa fase também teria ocorrido. Para atestar isso, Moreno cita a seguinte passagem de um texto sobre Cálculo Diferencial escrito por L'Hôpital em 1696: "Pode-se considerar que uma quantidade permanece a mesma quando é aumentada ou diminuída de uma quantidade infinitamente pequena"[109].

2. 5. 2. O segundo experimento

Num segundo experimento, o seguinte problema foi proposto aos estudantes[110]:

> Uma vela de 40 cm de comprimento é acesa e assim permanece por 5 horas, após o que é apagada. O comprimento da vela neste instante era de 8 cm. Supondo que o comprimento da vela decresce vagorosamente no início e rapidamente no final, faça uma representação da variação do comprimento da vela durante o tempo em que permaneceu acesa.

Cerca de 40% dos estudantes forneceram uma resposta satisfatória ao problema. Entretanto, ressalta o autor, foi bastante frequente uma representação dessa variação na qual duas velas de tamanhos diferentes são desenhadas, representando os estados inicial e final do processo, e cujas extremidades superiores são ligadas por uma linha pontilhada.

Segundo Moreno, os estudantes que assim procederam acabaram usando indevidamente o esquema de variação proporcional na interpretação do fenômeno, não atribuindo qualquer significado às expressões '*vagarosamente no início*' e '*rapidamente no final*' que faziam parte do enunciado do problema. Porém, todos os estudantes são capazes de representar todos os estados sucessivos da vela como uma evolução no tempo, o que mostra, segundo Moreno, o emprego por parte deles de uma abstração reflexiva.

Em relação às dos estudantes do ensino médio, as respostas de natureza geométrica dos estudantes universitários diminuíram sensivelmente, sendo que apenas 13% deles deram respostas baseadas em termos visuais, o que se explica pelo fato de as técnicas algébricas começarem a estar presentes no currículo de Cálculo. Entretanto, o autor ressalta que o abandono das representações visuais ou geométricas não foi acompanhado por um melhor controle no uso de outros tipos de representação, como, por exemplo, a representação da variação via uso de tabelas.

---

[109] (apud Moreno, 1996, p. 296).
[110] (Moreno, 1996, p. 297).

2. 5. 3. O terceiro experimento

Num terceiro experimento, o seguinte problema baseado nos trabalhos de Oresme e Galileu foi proposto aos estudantes[111]:

Enquanto dirigia um carro a 50 Km/h, comecei a aumentar a velocidade, vagarosamente, até o carro alcançar 60 km/h. Isto levou 1 hora. Qual foi a distância percorrida nesse intervalo de tempo?

A resposta de muitos dos estudantes do ensino médio - os quais, nesse caso, não recorreram ao uso de representações gráficas - a esse problema foi que a distância percorrida havia sido de 10 km, o que demonstra, segundo o autor, insensibilidade à contradição.

Entre os estudantes universitários a tendência foi pela escolha de uma abordagem analítica do problema, tentando calcular derivadas, etc. Mas, novamente, entre muitos deles manifestou-se a tendência de se continuar utilizando indevidamente representações lineares.

2. 5. 4. A conclusão

A interpretação geral que faz Moreno dos resultados desses experimentos é expressa por intermédio do referencial teórico da Teoria Piagetiana da Equilibração[112]:

> Quando confrontados com um distúrbio cognitivo os sujeitos tentam neutralizá-lo ignorando-o, considerando-o uma anomalia ou deformando-o de modo a não experienciá-lo como um distúrbio. Isto representa uma resposta conservativa, uma resistência do sistema à mudança [...] lidar com cenários que envolvem variação implica que, mais cedo ou mais tarde, será necessário introduzir a noção de velocidade instantânea. Esta noção só pode ser construída por intermédio de *abstração reflexiva*. Velocidade instantânea é uma noção que não possui um correspondente empírico. Então, o esquema de variação proporcional opera como um obstáculo epistemológico: como uma organização local dentro da qual podemos resolver problemas relativos a variações sem utilizar variáveis, uma vez que tudo é determinado por uma espécie de interpolação entre o primeiro e o último estados do processo. Somente mais tarde o estudante será capaz de superar o obstáculo produzido pelo modelo de variação proporcional. Este é o momento em que a *abstração reflexiva* se faz necessária.

---

[111](Moreno, 1996, p. 298).
[112] (Moreno, 1996, p. 299, itálicos meus).

É claro que esse momento de resistência do sistema à mudança e de resposta conservativa deve ter também o seu correspondente ao nível filogenético[113]:

> Este é o caso, durante o desenvolvimento da Análise Matemática, quando alguns matemáticos (Weierstrass et al) construíram, pela primeira vez, um exemplo de uma função contínua não-diferenciável. Essa classe de funções foi considerada 'patológica'. Hoje, essas funções pertencem ao conhecimento 'normal' graças à teoria dos fractais.

Embora Moreno, neste artigo analisado, seja mais explícito em relação ao papel desempenhado pelo mecanismo da abstração reflexiva no plano da psicogênese do que no da filogênese do conhecimento matemático, e tendo em vista que a sua tese central busca pôr em evidência a atuação paralela desse mecanismo nesses dois níveis, vamos considerar agora um outro artigo, de autoria de Guillermina Waldegg, com quem Moreno realiza pesquisas conjuntas dentro do mesmo referencial teórico piagetiano, que se encontra na referência[114], ao qual Moreno faz referência no artigo analisado e no qual dá-se agora destaque exclusivo ao papel desempenhado pelo mecanismo da abstração reflexiva (em vez de 'abstração reflexiva' Waldegg utiliza a expressão 'abstração simbólica') no plano da filogênese.

O artigo intitula-se *A noção de número antes do estabelecimento da ciência analítica*. Nele, a autora intenciona mostrar que, com base no aparato conceitual proporcionado pelo referencial teórico de Piaget e Garcia, seria possível olhar com outros olhos os trabalhos do matemático flamengo Simon Stevin de Bruges (1548-1620), isto é, seria possível mostrar que a concepção de número de Stevin, a qual, ao contrário do seu trabalho de introdução da notação decimal dos números na cultura ocidental, nunca chegou a ser suficientemente valorizada pelos historiadores da matemática, teria sido, na realidade, uma contribuição decisiva para se chegar a um conceito analítico de número, sem o qual teria sido impossível, agora segundo[115], o surgimento do cálculo diferencial, e para cuja constituição histórica, agora segundo ambos - Moreno e Waldegg - a operação de abstração reflexiva mostrou-se necessária.

---

[113] (Moreno, 1996, p. 299).
[114](Waldegg, 1993).
[115](Moreno, 1996, p. 297).

A fim de pôr em evidência a ruptura epistemológica ou salto qualitativo representado pela concepção de número de Stevin, Waldegg confronta-a com aquela que estava profundamente enraizada na tradição platônico-aristotélico-euclidiana. Desse confronto, Waldegg estabelece as seguintes conclusões:

1. que, com base na operação de divisão, a concepção platônico-aristotélico-euclidiana estabelecia uma distinção entre duas classes disjuntas de quantidades: as quantidades discretas, também chamadas 'números', e as quantidades contínuas, também chamadas 'grandezas'. Com base nessa distinção, uma outra dela decorria: a separação entre o domínio da geometria, que estudava as grandezas, e o da aritmética, que estudava os números e que também não estabelecia com o primeiro qualquer tipo de ligação. Contrariamente a essa tradição, ao negar a descontinuidade do número como algo que fizesse parte da essência dessa noção, a abordagem de Stevin iria estabelecer um tratamento unificado das quantidades contínuas e discretas, e a partir de então, o número não mais estaria associado apenas às grandezas discretas, mas a ambos os tipos de grandezas[116].
2. que, ao definir o número como "aquilo pelo qual *se explica a quantidade* de alguma coisa", diferentemente de Aristóteles, que o concebia como *uma quantidade* ou uma de duas classes em que as quantidades podiam ser classificadas, Stevin teria dado um salto conceitual, pois, embora ambos concebessem igualmente *a quantidade* como um conceito abstrato situado em um primeiro e mesmo nível de abstração, isto é, obtido mediante a operação mental de abstração empírica das demais propriedades dos objetos físicos, Aristóteles situa o número (e também a grandeza) neste primeiro nível, ao passo que Stevin, pelo fato de conceber o número não propriamente como uma quantidade, mas como algo que explica a quantidade, o situa em um segundo nível de representação[117].
3. que a concepção de Stevin, ao conferir ao número uma existência operatória - isto é, na qual as operações (concebidas como reflexo das operações físicas que se podem fazer com os objetos físicos) que se podem com eles realizar é

[116] (Waldegg, 1993, p. 116-117).
[117] (Waldegg, 1993, p. 116-117).

que determinam a sua natureza -, teria superado um obstáculo posto pela concepção aristotélica, o qual se expressava em termos da confusão ou da indistinção entre número e quantidade nomeada. Dessa forma, ao definir 'número puro' ou 'número aritmético' como aquilo que se obtém após a operação de abstração da quantidade, Stevin teria aberto a possibilidade de se realizar operações com os números independentemente das quantidades às quais eles se referem[118].

4. que se pode inferir da abordagem feita por Stevin da noção de número que ele o concebe como algo abstraído das *ações sobre os objetos* e não apenas como algo abstraído das propriedades dos objetos como o fazia Aristóteles. E como os resultados das ações sobre os *objetos físicos* não mudam a *quantidade total de matéria* que intervém no processo, Waldegg conclui que, subjacente à abordagem de Stevin, manifesta-se *a noção Piagetiana de conservação*, a qual se refletiria no plano dos *objetos matemáticos*, como *conservação da lei de composição interna* na manipulação dos símbolos numéricos. Nesse sentido, argumenta que, enquanto a concepção aristotélica, ao deter-se num primeiro nível ou grau de abstração (passagem do *nível propriamente empírico* de *ações concretas* sobre os *objetos físicos* ao *nível da abstração empírica* de *ações interiorizadas* sobre as *quantidades*) vê a *conservação da quantidade* como um reflexo da *conservação da matéria*, a concepção de Stevin, ao atingir um segundo nível ou grau de abstração (passagem do nível da abstração empírica de ações interiorizadas sobre as quantidades ao nível da *abstração simbólica* de *operações algébricas* sobre os *símbolos numéricos*) vê a *conservação da lei de composição interna* do domínio numérico como um reflexo da conservação da quantidade[119].

Embora legítima, esclarecedora e, em certo sentido, passível de um aproveitamento pedagógico, penso que algumas considerações críticas podem ser feitas em relação à interpretação do desenvolvimento histórico da noção de número feita por Waldegg.

---

118 (Waldegg, 1993, p. 118-120).
119 (Waldegg, 1993, p. 119-120).

É preciso ressaltar, antes de mais nada, que não se sabe por que razão Waldegg, em sua análise, restringe-se a navegar pelo mundo da matemática teórica grega, chamando-nos a atenção, em uma nota de rodapé na página 116, para o fato de que entende por *matemática teórica grega* aquela que está presente nos *Elementos* de Euclides.

Nesse sentido, parece desconsiderar o fato da possibilidade de existência de outras concepções de número, distintas daquela que se apresenta na tradição platônico-aristotélica-euclidiana, tanto no espaço físico e temporal no qual a matemática grega exerceu uma influência duradoura, quanto no mundo ocidental anterior ao surgimento do trabalho de Stevin. Teria sido essa também a concepção de número presente no universo no qual se movimentavam e trabalhavam os engenheiros, agrimensores, astrônomos e calculadores gregos?

Todos sabemos das razões ideológicas que, no mundo grego, opuseram Aritmética e Logística por um lado e Geometria e Geodésia por outro. Todos sabemos também que nesse universo 'impuro' e desvalorizado da matemática prática, e mesmo em toda a tradição pragmática da matemática não-helênica, o símbolo numérico sempre foi utilizado para expressar os resultados de contagens e de medições. Nesse sentido, a abordagem euclidiana dicotômica e disjunta da Aritmética e da Geometria e, por extensão, a concepção de número a ela subjacente, deveria ser vista como uma exceção (claro que nada desprezível e também de larga influência no mundo erudito), mais do que como uma regra ou, o que é pior, como a única regra. Mais apropriado seria ter dito que a concepção platônico-aristotélica-euclidiana era a concepção dominante no mundo grego, mas, assim mesmo, precisaríamos esclarecer a natureza dessa dominância e delimitar o âmbito no qual essa concepção teria tido, de fato, a sua interferência.

Além disso, se concordarmos com a análise feita por Szabó[120] do advento da matemática teórica grega, devemos admitir que a definição de 'arithmos' (e também outras noções como, por exemplo, a de ponto) presente nos *Elementos*, representaria, não uma noção forjada contra supostas concepções em vigor neste universo prático, mas sim o término de uma polêmica travada no seio do próprio universo teórico, uma vez que teriam sido as críticas eleáticas, inspiradas na doutrina de Parmênides, à teoria pitagórica das mônadas o ponto inicial da mesma.

Nesse sentido, a concepção euclidiana de *arithmos* representaria, portanto, uma reação (ou uma retificação possível) de, pelo menos, outra concepção que lhe antecedeu no próprio terreno teórico, a saber, a concepção de número que tinham os primeiros pitagóricos. Como se sabe, essa noção, tal como aquela (ou aquelas?) em vigor no universo da prática, ainda que por outras razões, não era, a rigor, anti-geométrica. Ao contrário, a noção de número estava profunda e inalienavelmente ligada à de ponto, isto é, à de configurações geométricas de pontos. Embora, contrariamente a outros ensinamentos dos primeiros pitagóricos (como, por exemplo, a teoria relativa aos números pares e ímpares), não tenha restado nenhum vestígio dessa *aritmética figurada* nos *Elementos* de Euclides, não se pode dizer que ela tivesse sido *superada* - e por essa razão também abandonada - pelo surgimento de uma nova concepção de número no terreno teórico. Prova disso, é que essa tradição continuou viva durante toda a Idade Média devido, principalmente, ao trabalho dos filósofos neo-platônicos.

Do mesmo modo como antes de Stevin co-existiram diferentes concepções de número, o mesmo pode ser dito em relação à época posterior à de Stevin e mesmo na atualidade.

Não se pode, por essa razão, afirmar ou mesmo supor que a tradição platônico-aristotélico-euclidiana tenha desaparecido devido ao surgimento de outras concepções supostamente *superiores* ou mais *engendradoras* de novos conhecimentos. Bastaria, por exemplo, revisitar os *Fundamentos da Aritmética* de Gottlob Frege para se convencer da existência e convivência de múltiplas concepções de número em pleno século XIX.

A devastadora crítica feita por Frege a Stuart Mill nesta obra nos mostra como a concepção aristotélica, de natureza empirista, sobrevive no modo como Mill dela se apropria. Por outro lado, a própria concepção de número de Frege distingue-se da defendida por Stevin, e não é por essa razão que ela deixa de ser também *operatória*.

A própria concepção de número apresentada por Aleksandrov et al. (1985) em pleno século XX resgata, em certo sentido, a concepção de Mill e, por conseguinte, insere-se na tradição empirista clássica inaugurada pela concepção aristotélica de número.

---

[120] (Szabó,1960).

Desse modo, é possível afirmar que embora novas concepções apareçam - e outras desapareçam, e outras ainda, não tenham sido identificadas ou nunca o serão - no curso da história, cada momento da filogênese é sempre pluriconceptual, e, assim sendo, torna-se bastante questionável interpretar o desenvolvimento histórico de uma idéia matemática em termos de uma sucessão bem comportada e hieraquizada de concepções acerca dessa idéia.

Uma vez explicitada essa argumentação em favor da co-existência de mais de uma concepção de número no mundo grego e ocidental, antes e após o advento da concepção de Stevin, concepções essas que nem sempre compartilhavam das mesmas características daquelas presentes na tradição platônico-aristotélico-euclidiana, é oportuno perguntar ainda se todas elas envolveriam algum grau de abstração, graus diferenciados de abstração ou mesmo tipos diferentes de abstração para que pudessem ter surgido no plano filogenético.

Ora, não foi o próprio Piaget quem defendeu o ponto de vista de que, no plano psicogenético, a construção da noção de número natural por parte do sujeito envolveria necessariamente a intervenção da operação mental de abstração reflexiva? Se isso é verdade, e se a análise psicogenética, como pensam Piaget e Garcia, pode e deve servir de base para a análise histórico-crítica, como seria possível imaginar que alguma concepção de número, por mais primitiva que fosse, pudesse ter surgido no plano filogenético sem a intervenção da abstração reflexiva?

Se assim é, não teria sido apenas a concepção de Stevin a gozar desse privilégio e não seria o mecanismo da abstração reflexiva, ou *abstração simbólica* como prefere Waldegg, a característica que a distinguiria das demais concepções que a antecederam ou mesmo das que a sucederam. Se nela está presente uma certa consciência da natureza ou da possiblidade operatória com os símbolos numéricos, isso não advém do fato de ela revelar um grau de abstração superior em relação à concepção platônico-aristotélico-euclidiana ou a outra qualquer, mas sim à natureza do próprio sistema de numeração hindu-arábico que o Ocidente herdara do Oriente, o qual, contrariamente aos sistemas de numeração que vigoraram na Antiguidade e na Idade Média Ocidental, era, de fato, um sistema operatório, isto é, que trazia em si a possibilidade da realização de operações sobre os próprios símbolos do sistema, sem utilizar o ábaco como instrumento mediador.

A rigor, o grande *salto conceitual*, a grande *mudança qualitativa* deveria, portanto, ser atribuída aos hindus e não a Stevin. Isso porque, foram eles que não só conseguiram construir um sistema de numeração de fato operatório, como foram também os construtores dos primeiros algoritmos (para as quatro operações fundamentais) da história, para cujos cálculos o ábaco mostrava-se totalmente supérfluo.

Um outro argumento crítico que poderia ser lançado, agora em relação ao artigo de Moreno, diz respeito ao fato de serem as concepções de um conceito epistemologicamente secundárias (isto é, subordinadas) em relação às intenções subjacentes a todo projeto cognoscitivo no plano da produção histórica do conhecimento. Em outras palavras, são as intenções subjacentes aos projetos cognoscitivos (muitas vezes, *mas nem sempre*, ligadas a problemas, polêmicas e controvérsias postos por outras esferas cognoscitivas, tecnológicas e/ou ideológicas) que exigem a revisão, a retificação ou mesmo o abandono das antigas concepções (ou então, a elaboração de novas concepções e a provocação de rupturas conceituais e epistemológicas) e não o contrário. Isso porque, as revisões conceptuais e a construção de novas concepções e conceitos não se processam no vazio ou na ausência total de motivações, nem surgem elas do nada meramente com o pretexto de pré-anunciarem, anteciparem ou de se mostrarem, por um acaso surpreendente, indispensáveis a um projeto cognoscitivo futuro que escapava inteiramente à *mentalidade* de uma época; ou seja, não são as novas concepções, mas sim as intenções, associadas às condições contextuais que as possam concretizar, que governam o desenvolvimento das ideias e das concepções acerca dessas ideias.

Nesse sentido, e a título de ilustração, é claro que o contexto do mundo ocidental pós-renascentista, no qual a política mercantilista quase que obrigava as pessoas a romperem com a antiga tradição da navegação costeira, a desafiarem e a lançarem-se ao mar aberto em busca de novas rotas comerciais (e de novas terras), colocava também novos desafios ao mundo do conhecimento e da tecnologia; a resposta a esses desafios foi o desenvolvimento de novos projetos cognoscitivos, dentre eles, o da geometria analítica. Um contexto que já dispunha de uma geometria sintética herdada dos gregos, de um sistema de numeração operatório herdado dos hindus, de uma trigonometria e de uma álgebra herdadas dos árabes (projetos cognoscitivos estes desenvolvidos com outras intenções e dentro de outras condições) e no qual havia a intenção (e a necessidade a ela associada) de se colocar o 'mundo em mapas', seria suficiente para explicar, é claro, o surgimento de uma nova concepção de número, ajustável e ajustada a esse projeto cognoscitivo.

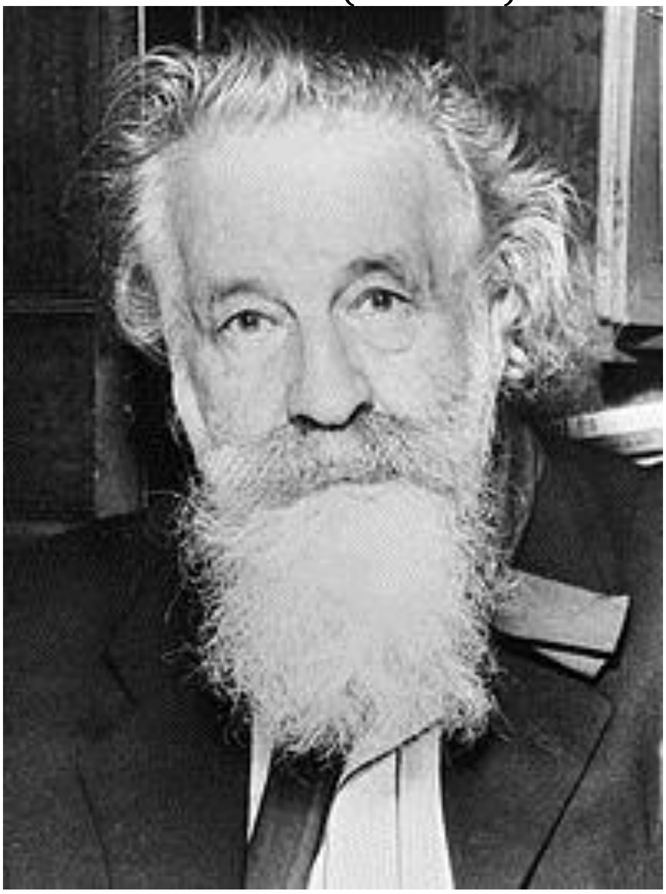
Se a dicotomia entre número e grandeza presente na concepção platônico-aristotélico-euclidiana de número fosse algo a ser superado irreversivelmente por força de uma inelutável e inexplicável sucessão previsível e hierarquizada de concepções descontextualizadas no tempo, como explicar o fato de, no final do século XIX, essa dicotomia voltar a ser defendida (é claro que, em outros termos, por outras razões, sob outras condições e com outras intenções) por matemáticos como Dedekind e outros?

A argumentação acima não pretendeu, de modo algum, desqualificar ou mesmo inviabilizar a análise do desenvolvimento de certas noções matemáticas na história feita por Waldegg ou por Moreno. A intenção subjacente foi a de meramente mostrar a possibilidade de diferentes leituras, associadas a diferentes referenciais teóricos, no terreno da história das idéias matemáticas. Isso nos permite levantar um outro argumento em relação às pesquisas ou ações pedagógicas baseadas no referencial teórico de Piaget & García: qual dessas leituras a psicogênese espelharia ou deveria espelhar? Por que razões, e com que legitimidade, dentre as múltiplas possibilidades interpretativas da história de uma noção matemática, o 'espelho' da psicogênese faria refletir exatamente aquela que coloca como motor do desenvolvimento das idéias matemáticas na filogênese a ação de mecanismos de passagem baseados em operações mentais tais como abstrações reflexivas, generalizações completivas etc.?

1. **Algumas pesquisas em educação matemática que recorrem à história da matemática com base no referencial teórico desenvolvido por Gaston Bachelard**

3. 1. O referencial teórico desenvolvido por Gaston Bachelard

Gaston Bachelard (1884-1962)[121]



Tendo em vista que as pesquisas, reflexões e propostas de ações pedagógicas que tematizam a relação entre a história da matemática e a educação matemática com base no referencial teórico desenvolvido por Bachelard em geral se apropriam da noção de *obstáculo epistemológico* criada por este pensador, nosso propósito nesta seção será tão somente o de tecer algumas breves considerações críticas em relação a essa noção à luz da nova leitura da história das ciências por ele proposta. Sempre que julgarmos conveniente, essas considerações serão feitas via método de aproximações e contrastes com o referencial Comteano e Piagetiano.

[121] Acesso foto:(https://pt.wikipedia.org/wiki/Gaston_Bachelard).

Tal como o fizeram Comte e Piaget, Bachelard também dividiu a história do pensamento científico em três etapas: a etapa pré-científica, a etapa científica e a etapa do novo espírito científico. A primeira etapa compreende toda a Antiguidade Clássica, a Idade Média, o Renascimento, os séculos XVI e XVII, se estendendo até meados do século XVIII.

A etapa científica inicia-se na segunda metade do século XVIII e termina no início do século XX, quando se inicia a última etapa. O marco de passagem da primeira para a segunda etapa se justifica pois, segundo Bachelard, na segunda metade do século XVIII a ciência experimentou um desenvolvimento considerável. O marco de passagem da segunda para a terceira etapa se deve, segundo Bachelard, ao fato de a razão ter atingido níveis inusitados de abstração, desafiando verdades tidas como absolutas e eternas, o que poderia ser atestado sobretudo pelo surgimento da Teoria da Relatividade de Einstein.

Mas se o critério subjacente à periodização Piagetiana assenta-se, como vimos, na idéia de grau de tomada de consciência das operações, para Bachelard, o critério subjacente diz respeito à *natureza das explicações científicas*. Se essas explicações tendem a se basear em imagens e analogias com objetos materiais e sensações, elas são incluídas por Bachelard na etapa pré-científica; caso elas atinjam o nível da intuição geométrica são incluídas na etapa científica e, finalmente, caso atinjam a forma abstrata são consideradas pertencentes à etapa do novo espírito científico.

De fato, assim se expressa Bachelard no *Discurso Preliminar* de sua obra *A formação do espírito científico*[122]:

> Também não hesitaremos em multiplicar os exemplos, pois queremos mostrar que, sobre qualquer questão, sobre qualquer fenômeno, é preciso passar primeiro da imagem para a forma geométrica e, depois, da forma geométrica para a forma abstrata, ou seja, seguir a via psicológica normal do pensamento científico. Portanto, partiremos quase sempre das imagens, em geral muito pitorescas, da fenomenologia primeira; veremos como, e com que dificuldades, essas imagens são substituídas pelas formas geométricas adequadas. Não é de admirar que essa geometrização tão difícil e tão lenta apareça por muito tempo como conquista definitiva e suficiente para constituir o sólido espírito científico, tal como se vê no século XIX. O homem se apega àquilo que foi conquistado com esforço. Será necessário, porém, provar que essa geometrização é um estágio intermediário.

A fim de se evitar o surgimento de significações incompatíveis com aquelas que Bachelard pretendeu emprestar a termos tais como imagem, gometrização e

---

[122] (Bachelard, 1996, p. 10-11).

abstração, vou passar a examinar com mais detalhe o significado que Bachelard atribui à passagem da forma imagética à forma geométrica, e desta, à forma abstrata a que os fenômenos são submetidos mediante os três diferentes tipos de explicações.

Tornar geométrica a representação dos fenômenos significa, para Bachelard, a tentativa de se explicar matematicamente os fenômenos, isto é, o esforço feito no sentido de se conciliar matemática e experiência, de se pôr os fatos sob a forma de leis, superando-se, dessa forma, as explicações baseadas em modelos analógicos ou imagéticos, isto é, aquelas em que o fenômeno a ser explicado é caracterizado mediante semelhanças que algumas de suas propriedades mantêm com as propriedades de um objeto físico.

Um dos exemplos dado por Bachelard de como as explicações no terreno da ciência se deixam governar pelas imagens é extraído de um artigo de Réamur publicado nas *Mémórias* da *Academie des Sciences* em 1731, no qual se tenta explicar as propriedades do ar comparando-as com as propriedades de uma *esponja*.

Segundo Réamur, essa analogia seria legítima tendo em vista que ela explica por que razões o ar pode se deixar comprimir, pode se tornar rarefeito ou pode, ainda, expandir-se ocupando um volume maior do que o ocupado em determinadas condições.

Segundo Bachelard, esse tipo de analogia, classificada como *obstáculo verbal*, embora sedutora, acaba simplificando a explicação propriamente científica e impedindo construções racionais mais precisas.

Um exemplo de explicação geométrica é extraído do estudo da eletricidade, campo no qual, segundo Bachelard, as primeiras imagens do fenômeno exerceram um fascínio poderoso e impeditivo para que se chegasse a racionalizações objetivas. Como o fenômeno da eletricidade se manifestou ao homem como algo misterioso, essa primeira imagem do fenômeno acabou se impondo e se tornando um obstáculo à sua geometrização. Somente após Coulomb ter decidido estudar esse fenômeno sob um ponto de vista inteiramamente abstrato, abandonando a configuração empírica sob a qual ele era normalmente considerado, é que se pôde formular as leis fundamentais da eletrostática. Vamos nos atentar para as explicações do próprio Bachelard ao trânsito ascendente do pensamento pelos três estádios hierárquicos por ele proposto[123]:

> Tornar geométrica a representação, isto é, delinear os fenômenos e ordenar em série os acontecimentos decisivos de uma experiência, eis a tarefa primordial em que se firma o espírito científico [...] Mais cedo ou mais tarde, na maioria dos domínios, é forçoso constatar que essa primeira representação geométrica, fundada num realismo ingênuo das propriedades espaciais, implica ligações mais ocultas, leis topológicas menos nitidamente solidárias com as relações métricas imediatamente aparentes, em resumo, vínculos essenciais mais profundos do que os que se costuma encontrar na representação geométrica. Sente-se pouco a pouco a necessidade de trabalhar sob o espaço, no nível das relações essenciais que sustentam tanto o espaço quanto os fenômenos. O pensamento científico é então levado para "construções" mais metafóricas que reais, para "espaços de configuração", dos quais o espaço sensível não passa, no fundo, de um pobre exemplo. O papel da matemática na física contemporânea supera pois, de modo singular, a simples descrição geométrica. O matematismo já não é descritivo e sim formador. A ciência da realidade já não se contenta com o como fenomenológico; ela procura o porquê matemático.

À primeira vista, poderia parecer que esse esquema trifásico proposto por Bachelard fosse apenas uma variante que poderia ser justaposta aos propostos por Comte e Piaget. Pensar dessa forma, entretanto, seria subestimar as características inovadoras e originais introduzidas por Bachelard no terreno da história e filosofia das ciências.

De fato, diferentemente de Comte e Piaget, uma dessas características diz respeito à introdução da noção de *progresso descontínuo* na interpretação do desenvolvimento histórico do pensamento científico.

Na época em que Bachelard publica seus trabalhos, a concepção positivista de desenvolvimento histórico da ciência, baseada na noção de *progresso contínuo*, era hegemônica nesse terreno. Isso significava que as histórias da ciência eram escritas com base no pressuposto filosófico tácito de que as novas teorias científicas eram simplesmente propostas a título de *complementação* das já existentes. Desse modo, o *edifício* da ciência aparecia como um *conjunto cumulativo* de verdades absolutas e irretificáveis.

Em ataque declarado e explícito a esse ponto de vista, e com base na noção de *ruptura epistemológica*, Bachelard irá contrapor a esse pressuposto positivista de acúmulo monótono de verdades, um outro que afirmaria que a ciência progride através de *retificações de erros* e por *reorganizações do saber*: "A retificação é uma

---

[123] (Bachelard, 1996, p. 7-8).

realidade, ou melhor, é a verdadeira realidade epistemológica, pois é o pensamento em seu ato, em seu dinamismo profundo"[124].

A retificação é vista, portanto, como o *motor do progresso científico*, a atividade científica como atividade que *constrói ativamente* o real e não como algo que o *descreve passivamente*.

Mas, nessa atividade de construção do real os homens se defrontariam, segundo Bachelard, com um conjunto de *obstáculos epistemológicos*, os quais deveriam ser superados para que a ciência pudesse avançar.

É claro que uma tal forma de se conceber o desenvolvimento histórico das ciências era desconhecida pelo movimento positivista. Como se sabe, Comte havia formulado, para isso, tomando-a de empréstimo a Condorcet e St. Simon, a sua *lei dos três estados*, segundo a qual, tanto o indivíduo quanto a espécie humana, passariam sucessivamente por três estágios sequenciados a saber: o teológico, o metafísico e o positivo.

Auguste Comte (1798-1857)[125]

A fim de caracterizar essa *marcha do espírito humano*, passemos a palavra ao próprio Comte[126]:

> No estado teológico, o espírito humano, *dirigindo essencialmente suas investigações* para a natureza íntima dos seres, para as causas primeiras e finais de todos os efeitos que o tocam, numa palavra, para os conhecimentos absolutos, *apresenta os fenômenos* como produzidos pela ação direta e contínua de agentes sobrenaturais mais ou menos numerosos, cuja intervenção arbitrária explica todas as *anomalias* aparentes do universo. No estado metafísico, que no fundo nada mais é do que simples modificação

---

[124] (Bachelard, apud Bulcão, 1981, p. 45).
[125] Acesso foto: (https://pt.wikipedia.org/wiki/Auguste_Comte).
[126] (Comte, 1978, p. 4, itálicos nossos).

> geral do primeiro, os agentes sobrenaturais são substituídos por forças abstratas, verdadeiras entidades (abstrações personificadas) inerentes aos diversos seres do mundo, e concebidas como capazes de engendrar por elas próprias todos os fenômenos observados, cuja *explicação* consiste, então, em determinar para cada um uma entidade correspondente. Enfim, no estado positivo, o espírito humano, reconhecendo a impossibilidade de obter noções absolutas, renuncia a procurar a origem e o destino do universo, a conhecer as causas íntimas dos fenômenos, para preocupar-se unicamente em descobrir, graças ao uso bem combinado do raciocínio e da observação, suas leis efetivas, a saber, suas relações invariáveis de sucessão e similitude. A *explicação dos fatos*, reduzida então a seus termos reais, se resume de agora em diante na ligação estabelecida entre os diversos fenômenos particulares e alguns fatos gerais, cujo número o progresso da ciência tende cada vez mais a diminuir.

Como se nota, tal como para Bachelard, o critério Comteano subjacente à periodização histórica no terreno da história das ciências reside na *natureza da explicação* fornecida pelo espírito aos fenômenos com os quais se defronta, ainda que, para um e outro, as explicações invocadas sejam diferentes.

Porém, tal como na de Piaget, na periodização proposta por Comte estava implícito o pressuposto da existência de uma *continuidade* entre as etapas, uma vez que as etapas antecedentes eram vistas como preparadoras das seguintes, isto é, necessárias ao surgimento das que lhes sucediam.

Cupani[127], replicando em favor do positivismo, reclama que

> com relação à visão bachelardiana do progresso da ciência, um positivista observaria que se tão grandes fossem as "rupturas" na marcha da ciência, tornar-se-iam incompreensíveis o progresso, a irreversibilidade daquela marcha (admitida por Bachelard) e a acumulação de conhecimentos (pois a noção de uma continuidade "dialética" lhe pareceria por demais vaga para que constituísse uma explicação) [...] As "rupturas" seriam válidas numa descrição histórico-psicológica da existência da ciência, mas não atingiriam a lógica do pensamento científico.

Penso, porém, que, em Bachelard, a afirmação da descontinuidade não implica a negação radical da continuidade. Essa continuidade, entretanto, não é vista como algo novo que se acrescenta ao antigo, mas como *assimilação do velho pelo novo*.

De fato, em pelo menos duas passagens de suas obras Bachelard tentará esclarecer a sua concepção de descontinuidade como algo que não se opõe à continuidade. No *Racionalismo Aplicado*[128] dirá:

> a própria história científica, quando apresentada num curto preâmbulo, como preparação do novo pelo antigo, acentua as provas de continuidade. Em tal atmosfera de confusão psicológica será, pois,

[127] (Cupani, 1985, p. 101).
[128] (Bachelard, apud Bulcão, 1981, p. 138).

> sempre difícil esclarecer os traços específicos do novo espírito científico.

Já em seu *Essai sur la connaissance approchée*[129] precisará que:

> Se temos uma visão geral das relações epistemológicas da ciência física contemporânea e da ciência newtoniana, vemos que não há desenvolvimento das antigas doutrinas para as novas, mas, antes e pelo contrário, *envolvimento dos antigos pensamentos pelos novos*.

Desse modo, a continuidade é salva mediante um movimento retroativo do novo para o antigo, e não por um movimento progressivo do antigo para o novo como defendiam os positivistas e mesmo os piagetianos. Daí, segundo Bulcão[130],

> a sua noção de "corte epistemológico", que define o movimento em que uma ciência rompe com o passado, colocando-se em uma nova abordagem do real. Essa ruptura com o passado, entretanto, não significa uma negação total desse passado, podendo ser mais bem caracterizada como um englobamento, no qual o passado é apenas uma das possibilidades de abordagem.

Uma outra característica inovadora introduzida por Bachelard em sua interpretação da história das ciências foi a de concebê-la como uma *história recorrente*. Isso significa que ele não apenas defendeu, mas o fez de forma consciente, o controvertido pressuposto de que os fatos científicos do passado devem ser analisados tendo como referência a ciência atual. É esse ponto de vista que se acha elegantemente condensado na afirmação: "Acompanhamos o desenrolar do drama das grandes descobertas na história com mais facilidade quando assistimos ao quinto ato"[131].

Mas a questão crucial que se coloca, a meu ver, não é a de maior ou menor facilidade na compreensão do passado, mas a de legitimidade desse próprio pressuposto no plano da investigação histórica. Entretanto, na obra de Bachelard, o postulado de uma história recorrente aparece como o desdobramento natural e necessário do pressuposto, ainda mais fundamental, de uma história progressiva descontínua cujo motor é posto nas *retificações de erros*. Quem vê *erros* nas formas de explicação e nas soluções dadas por nossos antepassados aos problemas com os quais se defrontaram - e ver *erros* é mais do que ver essas formas de

---

[129] (Bachelard, apud Bulcão, 1981, p. 137, itálicos nossos).
[130] (Bulcão, 1981, p. 137).
[131] (Bachelard, apud Bulcão, 1981, p. 39).

explicação simplesmente como opções ou possibilidades de saída historicamente condicionadas - deve possuir de antemão um padrão de julgamento do passado em função daquilo que a ciência se tornou no presente. Significa defender, por extensão, o pressuposto ainda mais controvertido da *possibilidade de julgamento* e *condenação* da ciência do passado tomando como referência a natureza e os valores pelos quais a ciência se pauta no presente.

Mesmo despertando a ira dos positivistas, mas não apenas deles, Bachelard não terá o menor escrúpulo em defender também, ao lado do pressuposto de uma história recorrente, este outro de uma *história normativa*. Na obra intitulada *A atividade racionalista da Física contemporânea*[132], dirá:

> Trata-se, de fato, de mostrar a ação de uma história julgada, de uma história que deve ter como objetivo distinguir erro e verdade, o inerte e o ativo, o nocivo e o fecundo [...] Na história das ciências é necessário compreender, porém também julgar.

Tendo a acreditar, porém, que os principais problemas a serem enfrentados hoje por parte daqueles que se dedicam à investigação no âmbito da história das idéias científicas e matemáticas nada têm a ver com o dilema hoje superado do julgar ou não julgar o passado, pois não é a opção por qualquer uma dessas duas alternativas que tornaria nossas constituições históricas mais plausíveis, mais críticas, mais convincentes e mais esclarecedoras.

Conscientizarmo-nos, através de uma história epistemológica como a de Bachelard, quão distante estava a ciência de nossos antepassados em relação à nossa não torna mais esclarecedoras as razões pelas quais a ciência deles foi o que foi, e é por esse segundo aspecto que uma verdadeira história da ciência se interessa. Nesse sentido, não vejo como uma análise que julgue o passado à luz de critérios contemporâneos possa produzir algo mais do que uma desqualificação preconceituosa, estéril e irrelevante da ciência de nossos antepassados em relação à contemporânea, ainda que não tivesse sido essa a intenção de Bachelard.

Embora o processo de investigação histórica seja sempre um empreendimento valorativo, penso que seria errôneo pensar que uma história seria tanto mais crítica quanto mais julgamentos de valor fossem feitos pelo historiador. Além disso, nem todo julgamento de valor é feito com base numa

---

[132] (Bachelard, apud Bulcão, 1981, p. 39).

projeção (que julgo ilegítima) de valores de uma época histórica sobre outra ou de um contexto a outro que lhe é contemporâneo.

Essa crítica nada tem a ver com uma suposta defesa de retorno positivista que postulasse a suspensão dos juízos de valores, quer no âmbito da prática de investigação científica, quer no da prática da investigação histórica. É claro que toda investigação histórica é sempre condicionada pela natureza das interrogações, pressupostos, valores, recursos e métodos dos quais o historiador de cada presente se utiliza. Mas isso não significa que o historiador de qualquer presente esteja completamente inconsciente da totalidade ou de parte desses elementos condicionadores. Significa apenas que o historiador de qualquer presente, ainda que constitua o passado à luz de todos esses elementos condicionadores, está sempre ciente de que 'o outro' que ele busca constituir não é 'o si próprio'; que ainda que ele possa constituir esse outro à sua maneira (dentro de certos limites, é claro, porque não se pode dizer o que bem se entende, sem que esse dito se faça acompanhar de outros ditos ligados às razões de sua aceitação), os elementos condicionadores que envolvem o processo e o produto da investigação são sempre distintos dos elementos condicionadores que envolvem o objeto historicamente situado que está sendo constituído.

Após esse pequeno desvio, voltemos à história da ciência de Bachelard. Onde encontrar os valores científicos *realmente verdadeiros* pelos quais a crítica do pensamento científico do passado deveria se pautar? Bachelard responderá que esses valores se encontram na epistemologia e é por esta razão que, para ele, é indispensável que toda crítica da ciência do passado se faça à luz da epistemologia. História e epistemologia das ciências aparecem-lhe, então, como empreendimentos indissociáveis. Segundo Bulcão[133],

> os critérios de julgamento da História das Ciências estão implícitos na Epistemologia Bachelardiana. Os conceitos de história perimida e história sancionada vêm corroborar o que acabamos de dizer. A história perimida é aquela que se fixa em teorias sem valor científico, como por exemplo a do flogístico; e a história sancionada, a que escolhe teorias que sejam ricas em dados positivos e científicos. Esses dois conceitos introduzidos por Bachelard vêm mostrar que a história sancionada é a que fala da presença da racionalidade da ciência.

Penso, porém, que essa subdivisão introduzida por Bachelard entre história perimida e história sancionada é muito pouco explicativa. Nada mais faz do que

---

[133] (Bulcão, 1981, p. 40).

tentar demarcar rigidamente, como o tentou também sem sucesso Popper, a fronteira entre o científico e o não-científico. É claro que, quando se está suficientemente recuado e distanciado no tempo daquilo que foi a ciência no passado, é sempre possível, tendo em vista aquilo que a ciência se tornou, condenar certos tipos de explicação rotulando-as de não-científicas ou pré-científicas. O problema, porém, consiste em se perguntar se quando se está inserido no movimento da investigação científica em construção, seria possível ou mesmo tão relevante preocuparmo-nos com o problema da separação das explicações ditas 'científicas' das não científicas, das explicações fecundas das estéreis etc. Mesmo porque sabemos hoje que a ciência se constrói não apenas através de explicações científicas fecundas, mas também mediante explicações científicas julgadas infecundas, explicações não-científicas fecundas e explicações não-científicas infecundas. É o processo histórico-cultural de construção da ciência, com todos os seus condicionamentos, pressupostos e valores - tidos como racionais ou irracionais, julgados eticamente reprováveis ou não - que fará essa seleção, e não qualquer critério de racionalidade *a priori* ou *a posteriori* que se julgue poder inferir de dentro ou de fora da atividade científica.

Sabemos hoje ainda o papel que as crenças de qualquer natureza - e mesmo os dogmas - desempenham na produção do conhecimento dito científico ou não. A ciência não se constrói sem dogmas, crenças ou pressupostos. Nem mesmo unicamente, ou sobretudo, com pressupostos ditos *racionais*. O papel ambivalente dos pressupostos (dogmáticos ou não) faz com que eles, em certos momentos, funcionem como estimuladores e propulsores e, em outros, como estagnadores ou mesmo impeditivos do desenvolvimento da ciência.

Nesse sentido, o critério moralizador de racionalidade no qual se pauta a epistemologia bachelardiana é rigoroso demais não apenas para orientar ou explicar a investigação científica contemporânea, como também para *julgar* a ciência de nosssos antepassados. Além disso, se os obstáculos que se interpuseram a nossos antepassados no processo de construção da ciência, e que continuam se interpondo aos cientistas da atualidade, fossem apenas e tão somente aqueles denunciados por Bachelard - ou mesmo que um número finito de outros pudessem se tornar transparentes e conscientes no processo de se fazer ciência - seria possível supor (suposição esta que hoje em dia está completamente descartada) que um dia chegaríamos a um estado inusitado de total ausência de erros na atividade científica, a um estado com a presença de uma super-comunidade científica insuspeita, infalível e acima de toda *condenação* futura.

Penso ainda que Bachelard, ao supervalorizar, em sua proposta epistemológica de uma reconstrução racional da ciência, o critério da natureza das explicações científicas, esquece-se de atribuir igual peso à *natureza das explicações históricas*. Assim, a sua história epistemológica das ciências, ao basear-se em alguns pressupostos controvertidos e quase completamente contestados pela ciência contemporânea da história, segundo sua própria classificação, situar-se-ia no estágio pré-científico.

Até agora, minha análise centrou-se no Bachelard historiador. Mas estaríamos enganados se supuséssemos que Bachelard faz história pela história. Na verdade, penso que o seu interesse pela história é apenas indireto. Nele, são as intenções e propósitos do epistemólogo-educador que falam mais alto. Se assim não fosse, como explicar o subtítulo do seu *A formação do espírito científico*? O subtítulo *uma contribuição para a psicanálise do conhecimento* quer, no fundo, destacar o interesse de Bachelard pelas condições de apropriação do conhecimento científico por parte dos aprendizes da atualidade. De fato, Bachelard não hesita em apropriar-se do termo *psicanálise* ressignificando *epistêmica e pedagogicamente* o seu sentido original freudiano[134]:

> O significado de psicanálise, para Freud, pode ser expresso em três níveis: como método de investigação, que consiste em evidenciar o significado insconsciente das palavras, das ações e dos atos imaginários; como um método psicoterápico baseado nessa investigação e como um conjunto de teorias psicológicas que sistematizam os dados introduzidos pelo método acima citado. Bachelard dá uma nova orientação ao termo 'psicanalítico', ao considerar que as forças psíquicas, os fatores inconscientes e os sonhos profundos também atuam sobre o ato de conhecer e constituem obstáculos à objetividade científica. Refletindo apenas sobre o conhecimento, Bachelard afirma que pretende fazer psicologia "por reflexo" e não "psicologia direta", isto é, utilizá-la somente na medida em que auxilia a depuração dos fatores inconscientes que perturbam o ato do conhecimento [...] trata-se de um processo que tem por finalidade mostrar a influência dos valores insconscientes na base do conhecimento científico.

Segundo Bulcão[135], Michel Vadée, um dos comentadores contemporâneos da obra de Bachelard, é ainda mais explícito em relação às reais intenções da psicanálise bachelardiana, pois, para ele,

[134] (Bulcão, 1981, p. 60-61).
[135] (Bulcão, 1981, p. 65).

> a psicanálise em Bachelard tem objetivos terapêuticos, catárticos e normativos, donde seu aspecto moralizador e pedagógico. Michael Vadée, tendo interpretado os obstáculos como psicológicos, não vê outra saída para Bachelard senão recorrer à psicanálise, ou seja, a uma psicologia do espírito científico, a fim de afastar o erro.

Pessoalmente, não vejo problema algum com as *intenções* pelas quais Bachelard faz história das ciências ou mesmo com as razões pelas quais se sente quase que obrigado a recorrer a uma espécie de *psicanálise cognitiva*. Considero plenamente legítima a intenção de se recorrer à história com fins epistemológicos, psicológicos ou pedagógicos. No entanto, como já ressaltei anteriormente, vejo problemas com a natureza dos pressupostos a que ele recorre para a constituição de sua história epistemológica.

Mas não é só isso. Infelizmente, tal como Comte e Piaget o fizeram, Bachelard, a fim de realizar o seu empreendimento de uma história com fins epistemológicos, psicológicos e pedagógicos, se obriga a lançar mão do contestado pressuposto recapitulacionista, análogo ao princípio genético, que estabece um paralelismo entre os níveis filogenéticos de sua história epistemológica e os psicogenéticos de seus supostos aprendizes da atualidade.

De fato, o esquema trifásico proposto por Bachelard para explicar o desenvolvimento do pensamento científico no plano histórico reaparece também ao nível da formação do espírito científico no indivíduo.

Segundo Bachelard, o indíviduo, no esforço progressivo feito no sentido de atingir a natureza do pensamento científico contemporâneo, passaria pelos seguintes estágios sequenciais: 1) o estágio concreto; 2) o estágio concreto-abstrato; 3) o estágio abstrato.

No primeiro desses estágios, o indivíduo estaria preso às primeiras imagens do fenômeno; no segundo, o indivíduo já mostraria a capacidade de se utilizar de explicações de natureza geométrica, no entanto, essas abstrações de natureza geométrica só adquirem legitimidade para ele se estiverem referenciadas ao plano sensível; finalmente, no terceiro estágio, o indivíduo mostrar-se-ia capaz de se desligar completamente da experiência primeira - imediata, cotidiana, espontânea e sensível - e de fornecer aos fenômenos explicações objetivas e racionais que contradizem a experiência primeira[136].

---

[136] (Bachelard, 1996, p. 11-12).

Quando se compara essa caracterização feita por Bachelard do trânsito do pensamento científico ao longo das três etapas com aquelas propostas por Piaget e Comte, algumas conclusões interessantes podem ser retiradas.

Em primeiro lugar, parece haver uma fixação não-explicada por parte dos três em torno do número três. Por que haveria de ser trifásico o trânsito progressivo do pensamento científico? Tratar-se-ia de uma analogia imagética pré-científica com o modelo dialético trifásico da tese-antítese-síntese de Hegel?

Quando se atenta para essa fixação inexplicada não se consegue deixar de evocar, contra essas três filosofias da história do pensamento científico, a pertinência do contra-argumento de Habermas[137] à lei dos três estados proposta por Comte:

> essa lei do desenvolvimento possui manifestamente uma forma lógica não correspondente ao status das hipóteses nomológicas das ciências experimentais: o saber que Comte reivindica para interpretar o significado do saber positivo não está, ele mesmo, subsumido sob as condições do espírito positivo.

Desse modo, as mesmas críticas que fizemos a Piaget & García em relação à forma de se estabelecer um vínculo entre a história e a psicogênese continuam válidas para Bachelard, como o seriam para Comte. Bachelard[138], porém, chega a abusar ainda mais desse paralelismo quando se refere àquilo que chama a *base afetiva* dos seus três estágios filogenéticos:

> Estabelecer a psicologia da paciência significa acrescentar à lei dos três estados do espírito científico uma espécie de lei dos três estados da alma caracterizados por interesses: 'alma pueril ou mundana', animada pela curiosidade ingênua, cheia de assombro diante do mínimo fenômeno instrumentado [...]; 'alma professoral', ciosa de seu dogmatismo, imóvel na sua primeira abstração, fixada para sempre nos êxitos escolares da juventude, repetindo ano após ano o seu saber, impondo suas demonstrações, voltada para o interesse dedutivo [...]; 'alma com dificuldade de abstrair e de chegar à quintessência', consciência científica dolorosa, entregue aos interesses indutivos sempre imperfeitos, no arriscado jogo do pensamento sem suporte experimental estável, perturbada a todo momento pelas objeções da razão, pondo sempre em dúvida o direito particular à abstração, mas absolutamente segura de que a abstração é um dever, o dever científico, a posse enfim purificada do pensamento do mundo!

Desse modo, penso que na *história* do pensamento científico de Bachelard as condições psicológicas do progresso da ciência são ilegitimamente identificadas com as condições psicológicas do processo de construção individual do saber; assim, tal como ocorre com Piaget & García, a psicogênese é projetada na

[137] (Habermas, 1982, p. 92).
[138](Bachelard, 1996, p. 12-13).

filogênese e toda a análise histórica - agora, distintamente da de Piaget & García, na qual a projeção é meramente cognitiva - passa a ser construída e orientada por certos tipos de *bloqueios psicológicos afetivos* a que se chama *obstáculos epistemológicos*.

A história bachelardiana do pensamento científico acaba, dessa maneira, funcionando como um fiel espelho plano que reflete a dimensão psicológica das condições afetivas de apropriação individual contemporânea do saber científico.

Como já ressaltei anteriormente, não vejo nenhum mal em se fazer história com *intenções* epistemológicas, psicológicas ou pedagógicas. Mas penso que se comete um equívoco irreparável ao se supor que, para esse fim, a *distância cognitiva e/ou afetiva* que separa os protagonistas adultos das ciências de outras épocas dos protagonistas de nossa ciência contemporânea seja a mesma que a que separa as crianças da atualidade dos protagonistas de nossa ciência contemporânea, ou que os supostos *obstáculos epistemológico-afetivos* que os protagonistas das ciências de outras épocas supostamente enfrentaram tenderiam a ressurgir para as crianças da atualidade no enfrentamento de problemas aparentemente semelhantes. Aliás, que razões misteriosas seria preciso invocar para explicar o ressurgimento, para as crianças e jovens de cada presente em seus esforços de apropriação da ciência, *apenas dos obstáculos* e *não também das soluções*, corretas ou não, ensaiadas por nossos antepassados ao lidar com os problemas ditos científicos? Que deus-espelho-sádico seria esse que lhes imporia o castigo eterno de herdar e inventariar as dívidas, as dificuldades e os sacrifícios de um processo sonegando-lhes, porém, os seus saldos, as suas saídas e as suas realizações?

E já que estamos falando em *obstáculos*, e já que é precisamente esta noção ambígua e polêmica do referencial bachelardiano que vem sendo apropriada com mais frequência pelos educadores matemáticos a partir da década de 80, voltemos a ela um pouco mais de nossa atenção para finalizar esta seção.

É no primeiro parágrafo do primeiro capítulo do *A formação do espírito científico*, logo após o *Discurso Preliminar*, que Bachelard nos define o que entende por *obstáculo epistemológico*[139]:

[139] (Bachelard, 1996, p. 17, itálicos do autor).

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que *é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado.* E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos.

Essa definição, aparentemente clara, começa a tornar-se confusa à medida que Bachelard passa a descrever, nos diferentes capítulos dessa obra, os diferentes tipos de obstáculos classificados em gerais e particulares, quais sejam: a experiência primeira, o conhecimento geral, o obstáculo verbal, o conhecimento unitário e pragmático, o conhecimento quantitativo, o obstáculo animista e o obstáculo substancialista.

Portanto, uma primeira crítica, assinalada por Bulcão[140], que poderia ser remetida a essa noção, diz respeito ao seu estatuto ambíguo:

> Os obstáculos parecem à primeira vista, os mais diferentes, sendo difícil, por isso, determinar se são de ordem moral, ideológica, psicológica, etc. Além disso, não está muito claro se o seu sentido é estritamente epistemológico ou se chega a ser pedagógico. Daí a diversidade de interpretações sobre o assunto.

Dominique Lecourt, um dos comentadores contemporâneos da obra de Bachelard, não hesita em interpretar a noção de *obstáculo epistemológico*[141] como

> valores ideológicos que interferem na ciência e lhe alteram o significado [...] e conclui que os obstáculos intervêm no conhecimento científico por intermédio da Filosofia, que representa os valores ideológicos, cabendo à Epistemologia afastá-los na medida do possível.

Por razões que já manifestei anteriormente, tendo, no entanto, a compartilhar da crítica marxista a esta noção feita por Michel Vadée, um outro comentador contemporâneo de Bachelard.

Segundo Bulcão[142], Vadée

> vê na noção de obstáculo epistemológico uma reafirmação do idealismo de Bachelard. Para ele, os obstáculos epistemológicos são psicológicos e ahistóricos e constituem objeto de estudo de uma teoria dos "instintos" do espírito. Isso significa que, para Vadée, os obstáculos são provenientes de uma estrutura psíquica, reduzindo-se a puros "instintos" do espírito que conhece, além de serem independentes do contexto histórico em que se manifestam [...] Esses impedimentos são de natureza puramente subjetiva e não são obstáculos naturais ou materiais, fundados na natureza da realidade física, nas formas de consciência de classe ou nas ilusões ideológicas.

---

140 (Bulcão, 1981, p. 65).
141 (Bulcão, 1981, p. 57-58).
142 (Bulcão, 1981, p. 58).

Concordando em parte com Vadée, ao afirmar que "a origem psicológica é a que está mais presente em Bachelard", e que "faltou a Bachelard aprofundar a relação do sujeito individual com o contexto em que vive a fim de mostrar os limites do psicológico e do social", a conclusão pessoal a que chega Bulcão a respeito dessa noção é que todos os obstáculos assinalados por Bachelard poderiam ser reduzidos a apenas um, qual seja, o obstáculo representado pela *experiência primeira* ou pelo *conhecimento comum*, uma vez que, para ela, à noção de *obstáculo epistemológico* estaria subjacente o pressuposto bachelardiano de oposição radical entre o conhecimento científico e o conhecimento de senso comum[143].

É surpreendente que Bachelard, no seu esforço de análise e *psicanalização* do conhecimento objetivo - conhecimento este que julga tão radicalmente distanciado da experiência primeira - não tenha se dado conta de raciocionar circularmente utilizando-se, para esse fim, de uma noção - como a de obstáculo - tão ligada ao senso comum e à experiência subjetiva cotidiana de quem quer que seja. Condena-se a experiência cotidiana, ao transformá-la no obstáculo primeiro ou fundamental, recorrendo-se a uma noção tão íntima e peculiar à experiência cotidiana!!

3.2. A apropriação da noção de obstáculo epistemológico por educadores matemáticos

Entre os pesquisadores que atuam no terreno da educação matemática, há uninanimidade em apontar o nome do educador matemático francês Guy Brousseau - professor-pesquisador da Universidade de Bordeaux I - como o primeiro a perceber a fecundidade dessa noção para o direcionamento de pesquisas nessa área.

Contra a própria convicção expressa por Bachelard, no primeiro capítulo do seu *A formação do espírito científico*, de que nenhuma das teses que havia defendido nessa obra aplicar-se-ia ao conhecimento matemático, tendo em vista que, diferentemente da forma de crescimento do espírito científico, "a história da matemática é maravilhosamente regular, conhece períodos de pausa mas não conhece períodos de erro"[144], Brousseau irá reivindicar, em sua exposição feita no XXVIII Encontro da CIEAEM (Commission Internationale pour L'Étude et L'Amélioration de L'Enseignement des Mathématiques), ocorrido em Louvain (Bélgica) em agosto de 1976, a oportunidade do aproveitamento da noção de obstáculo epistemológico na pesquisa em ensino de matemática.

Guy Brousseau[145]

Mas foi só a partir de meados da década de 1980, após a republicação ampliada da fala de Brousseau na revista francesa *Recherches en Didatique des Mathématiques*[146], que se iniciou um debate internacional em torno desta noção no interior da comunidade de educadores matemáticos. De fato, a partir de então, a repercussão da noção bachelardiana de *obstáculo epistemológico*, associada à noção bachelardiana correlata de *erro*, foi tão intensa que dois encontros internacionais de educação matemática, com temáticas exclusivamente ligadas a essas noções específicas, foram realizados no Canadá, na segunda metade da

---

[143] (Bulcão, 1981, p. 59-60).
[144](Bachelard, 1996, p. 28).
[145]Acesso foto: (http://revistaescola.abril.com.br/formacao/cultura-matematica-instrumento-para-cidadania-guy-brousseau-calculo-518776.shtml).
[146](Brousseau, 1983).

década de 1980: o 39º Encontro Internacional da CIEAEM, ocorrido em agosto de 1987 em Sherbrooke (Canadá) e o Colóquio Internacional sobre *A Construção de Saberes: Obstáculos e Conflitos*, ocorrido, também em 1988, em Montreal (Canadá).

Não é nossa intenção aqui recuperar esse debate em todas as suas nuances e detalhes, mas tão somente pôr em evidência: 1) as razões pelas quais ele acabou favorecendo o surgimento de novas formas de se conceber a relação entre a história da matemática, a epistemologia da matemática e o ensino-aprendizagem da matemática no âmbito da pesquisa em educação matemática; 2) a natureza de algumas pesquisas que vêm sendo realizadas e de algumas discussões que vêm ocorrendo com base nesse novo referencial.

3.3. A concepção Brousseauniana do papel da história da matemática na investigação em educação matemática e da relação entre história, epistemologia e didática da matemática

Tendo em vista o caráter simultaneamente histórico, epistemológico e psicológico da noção Bachelardiana de *obstáculo epistemológico*, seria de se esperar que qualquer importação dessa noção a uma nova área de conhecimento - no caso a educação matemática ou a didática da matemática, como preferem denominá-la os franceses - viesse acompanhada da necessidade de explicitação e defesa de novas formas de se conceber a relação entre história, epistemologia e cognição e/ou entre história, epistemologia e didática da matemática.

Bachelard, em seu *A formação do espírito científico*[147], já havia posto em destaque, do seguinte modo, a natureza distintiva das tarefas do epistemólogo e do historiador:

> É o esforço da racionalidade e de construção que deve reter a atenção do epistemólogo. Percebe-se assim a diferença entre o ofício de epistemólogo e o de historiador da ciência. O historiador da ciência deve tomar as idéias como se fossem fatos. O epistemólogo deve tomar os fatos como se fossem idéias, inserindo-as num sistema de pensamento. Um fato mal interpretado por uma época permanece, para o historiador, um *fato.* Para o epistemólogo, é um *obstáculo,* um contra-pensamento.

Percebe-se, através dessa passagem, que é no esforço de *racionalizar os fatos retrospectivamente,* tendo como referência aquilo que eles se tornaram no tempo do epistemólogo racionalizador e moralizador, que residiria, segundo

Bachelard, a natureza do empreendimento epistemológico. É essa suposta distinção entre as tarefas do epistemólogo e do historiador que permite a Bachelard estabelecer a polêmica distinção entre *fato* e *obstáculo*. A passagem seguinte[148], é ainda mais esclarecedora a esse respeito:

> Entretanto, parece-nos que o epistemólogo - que nisso difere do historiador - deve destacar, entre os conhecimentos de uma época, as idéias fecundas. Para ele, a idéia deve ter mais que uma prova de existência, deve ter um destino espiritual. Não vamos pois hesitar em considerar como erro - ou como inutilidade espiritual, o que é mais ou menos a mesma coisa - toda verdade que não faça parte de um sistema geral [...].

A possibilidade defendida por Bachelard de seleção de idéias fecundas na história do desenvolvimento do conhecimento só se sustenta quando se sobrepõe conscientemente ao tempo histórico um outro momento temporal que ele não comporta em si mesmo. Bachelard irá expressar essa sobreposição mediante as noções de *tempo cronológico* e *tempo lógico*[149]:

> A epistemologia ensina-nos uma história científica tal como *deveria ter sido*, [...], isto é, tal como *deveria ter sido prevista* [...]. A epistemologia situa-nos, então, num *tempo lógico*, nas razões e nas consequências bem colocadas, num tempo lógico que não mais tem as delongas da real cronologia.

Mas essa história científica de natureza epistemológica do que deveria ter sido previsto mas não foi, tal como a história epistemológica de Piaget & García, nada mais é do que uma caracterização das ideias passadas à luz daquilo que elas não conseguiram ser em relação àquilo que se tornaram no presente. Nesse sentido, o passado sempre se torna insuficiente e insatisfatório à luz do presente, não sendo essa sobreposição temporal proposta por Bachelard nada mais do que uma projeção ilegítima do presente sobre o passado e não uma tentativa - agora sim, legítima à luz da investigação histórica - de busca de sentido das idéias passadas à luz do que de fato foram ou poderiam ter sido dadas as condições sociais contextuais nas quais surgiram e se desenvolveram.

Já tecemos anteriormente suficientes comentários a respeito da ilegitimidade dessa projeção do presente sobre o passado que caracteriza a distinção Bachelardiana entre as tarefas do historiador e do epistemólogo e, consequentemente, entre a história das idéias e a epistemologia. Poderíamos acrescentar somente que, devido ao reducionismo psicológico subjacente ao

---

[147] (Bachelard, 1996, p. 22, itálicos do autor).
[148] (Bachelard, 1996, p. 22).

empreendimento Bachelardiano, a epistemologia passa a ser vista e concebida como uma atividade destacada e destacável da atividade do historiador, atribuindo-se a ela um *papel distinto* daquele que efetivamente ela cumpre no terreno da investigação caracteristicamente histórica, qual seja, a de funcionar como um corpo de pressupostos, explícitos ou não, justificados ou não, acerca da natureza do conhecimento histórico e científico e a partir do qual se assenta a investigação e o discurso histórico.

Para Bachelard, portanto, fazer epistemologia passa a ser sinônimo de fazer história num segundo grau de abstração, isto é, de fazer uma *segunda análise histórica* com intenções distintas daquelas que orientaram o trabalho de investigação histórica propriamente dito.

Mas por que chamar *epistemologia* a essa segunda história? Por que não imputar-lhe simplesmente a denominação de *história alternativa*, uma vez que também as análises históricas primeiras dos historiadores, bem como as análises epistemológicas no sentido de Bachelard, são sempre empreendimentos intencionados? Por que razões a natureza da intenção direcionadora do processo de investigação histórica nos deveria remeter inevitavelmente a um terreno distinto do da própria história? Por que reconstruções ditas *racionais* da história, tais como a de Bachelard e as de tantos outros como Lakatos e Piaget & García, por exemplo, deixariam de ser *histórias* e passariam a ser *epistemologias*? Por que o 'racional' - entendido como análise reducionista de natureza lógica, psicológica, heurística etc. - deveria *fundar um* ou *operar em um* campo distinto do da própria história? Por que concepções distintas de racionalidade deveriam justificar o abandono do terreno da própria história? Essas são algumas das questões que poderíamos levantar a fim de se questionar a concepção Bachelardiana da relação entre história e epistemologia.

Penso, portanto, que a tentativa Bachelardiana de distinguir radicalmente entre análise histórica e análise epistemológica da história é pouco esclarecedora, pois nos leva a um beco sem saída, ou melhor, nos faz inevitavelmente retornar ao terreno da própria história.

Brousseau irá apropriar-se da noção Bachelardiana de obstáculo epistemológico mantendo praticamente inalterada a concepção dessa noção. Nesse

---

[149](Bachelard, 1977, p. 114, itálicos do autor).

sentido, um obstáculo epistemológico é sempre um conhecimento e não, como se poderia à primeira vista supor, uma ausência de conhecimento. Além disso, esse conhecimento não é um conhecimento falso, uma vez que permitiu ou permite produzir respostas satisfatórias ou corretas a determinados tipos de problemas. No entanto, esse mesmo conhecimento, ao ser transposto ou aplicado a outras categorias de problemas, acaba produzindo respostas inadequadas ou incorretas, produzindo erros. Mas esses erros produzidos por obstáculos devem, por sua vez, ser considerados um tipo especial de erros, uma vez que não se incluem entre aqueles produzidos pelo desconhecimento, pela ignorância, pelo acaso, pela imprevisibilidade ou pelo descuido. Ao contrário, constituem erros previsíveis, persistentes e resistentes à correção[150].

Além disso, parece que Brousseau, ao importar a noção de 'obstáculo epistemológico' para o terreno da didática da matemática, embora tenha submetido alguns pressupostos Bachelardianos a uma análise retificadora, não chegou a romper explicitamente com essa concepção da relação entre história e epistemologia; ao contrário, traz, pela primeira vez, para o terreno da investigação em educação matemática propriamente dito esse novo papel a ser desempenhado pela história da matemática, mediado pela análise epistemológica.

No que se refere à análise retificadora e ampliadora empreendida no processo de apropriação das idéias Bachelardianas, Brousseau deverá, antes de mais nada, diferentemente de Bachelard, que explicitou *tipos diversos* de obstáculos no processo de constituição do pensamento científico, propor e defender a tese da existência de *origens diversas* para os obstáculos epistemológicos no processo de construção do conhecimento matemático por parte dos alunos da atualidade, isto é, deverá propor uma classificação dos obstáculos com base no critério das razões que que os desencadeiam.

É preciso esclarecer que, para Brousseau, todos os obstáculos que se manifestam ao estudante no processo de aprendizagem, ainda que as razões para essa manifestação possam ser de origens diversas, são, na verdade, obstáculos *epistemológicos*. Isso porque, todos esses obstáculos dizem respeito ao conhecimento matemático propriamente dito.

[150] (Brousseau 1983, p.172-174).

No seu artigo de 1983, publicado na *Recherches*, Brousseau[151] apresentou três origens para os obstáculos epistemológicos: 1) uma origem ontogenética; 2) uma origem didática; 3) uma origem propriamente epistemológica.

Os obstáculos epistemológicos de *origem ontogenética* seriam aqueles que se manifestariam em decorrência do desenvolvimento cognitivo do aluno ou, nas proprias palavras de Brousseau, "aqueles que se manifestam devido às limitações (neurofisiológicas entre outras) do sujeito em um determinado momento de seu desenvolvimento"[152].

Poderíamos citar como exemplo de obstáculo ontogenético a crença compartilhada por crianças que estariam, segundo Piaget, no estágio pré-operatório, de que a mudança na disposição espacial de um número conveniente de fichas alteraria a quantidade das mesmas.

Os obstáculos epistemológicos de *origem didática* seriam aqueles que se manifestariam em decorrência do modo de organização e transmissão do saber matemático no âmbito da escola. Brousseau assim se manifesta em relação a eles: "os obstáculos de origem didática são aqueles que parecem não depender senão da escolha do projeto do sistema educativo"[153]. Fornece-nos como exemplo de obstáculo dessa natureza - o qual se manifestaria na aprendizagem dos números decimais - a crença compartilhada pelos estudantes de que esses números nada mais seriam do que números naturais com uma vírgula, associada a uma certa forma mecanizada de se realizar as operações com os números naturais.

Finalmente, os obstáculos epistemológicos de *origem propriamente epistemológica*, isto é, obstáculos tais como Bachelard os entendeu, seriam aqueles que se manifestariam em decorrência da própria forma de constituição do conhecimento matemático. Nas palavras de Brousseau[154], esses obstáculos seriam

> aqueles aos quais não se pode e nem se deve escapar, pelo fato de terem desempenhado um papel constitutivo no conhecimento visado. Pode-se re-encontrá-los na história dos próprios conceitos.

Pode-se afirmar então que, para Brousseau, os obstáculos epistemológicos de origem epistemológica identificar-se-iam com os obstáculos históricos.

[151] (Brousseau, 1983, p.176-178).
[152] (Brousseau, 1983, p. 177).
[153] (Brousseau, 1983, p. 177).
[154] (Brousseau, 1983, p. 178).

Com essa tese da diversidade de origens para os obstáculos epistemológicos, Brousseau deverá superar a contestável concepção Bachelardiana subjetivista da atribuição dos erros no processo de construção do conhecimento *exclusivamente* ao sujeito que o constrói. Deverá também *amenizar* o pressuposto da existência do paralelismo ontofilogenético que permeia o trabalho de Bachelard, ao afirmar que, por terem resistido por um longo período de tempo, é *provável* que os obstáculos assinalados por Bachelard em seu *A formação do espírito científico*[155],

> tenham seu equivalente no pensamento da criança, se bem que o ambiente material e cultural atual modificaram, sem dúvida, as condições sob as quais as crianças com eles se deparam.

Porém, embora Brousseau reconheça as diferenças das condições contextuais que separam as crianças da atualidade das dos cientistas-adultos do passado, *não deverá negar* esse pressuposto. De fato, logo no início da seção II do artigo a que estamos fazendo referência, dedicada ao estudo da noção de obstáculo, Brousseau[156] vai assinalar que:

> o *mecanismo da aquisição de conhecimentos* tal como o descrevemos anteriormente pode aplicar-se tanto à epistemologia ou à história das ciências, quanto à aprendizagem e ao ensino. Em todos esses casos a noção de obstáculo aparece como fundamental para se colocar o problema do conhecimento científico.

É preciso atentar-se para o fato de que, ao fazer tal afirmação, Brousseau *não está querendo dizer* (porém, está querendo dizer!!!) que os obstáculos históricos deveriam *inevitavelmente* ocorrer também no processo de ensino-aprendizagem (mais tarde iremos constatar que essa não-inevitabilidade é *apenas alegada*, pois entra em contradição com os encaminhamentos concretos subjacentes às investigações realizadas com base na noção de obstáculo e com o próprio papel desempenhado pela análise histórico-epistemológica na investigação didática). Aquilo que tenderia a repetir-se ou manter-se em todos esses níveis seria o *mecanismo da aquisição de conhecimentos*. E que mecanismo seria esse?

---

[155] (Brousseau, 1983, p. 173).
[156] (Brousseau, 1983, p. 172, itálicos nossos).

Para se entender a resposta de Brousseau a essa questão é preciso antes de mais nada esclarecer que a razão pela qual a *teoria Bachelardiana dos obstáculos epistemológicos* lhe despertou a atenção e o interesse foi exclusivamente 'didática'. Coloco a palavra 'didática' entre aspas para ressaltar o fato desse interesse estar dirigido sobretudo à *investigação didática*, mais particularmente, à investigação em didática da matemática enquanto uma área científica do conhecimento.

E que concepção tem Brousseau da didática da matemática enquanto área de conhecimento? No meu modo de entender, a concepção que tem Brousseau da didática da matemática é fortemente ancorada em e dependente de sua concepção *unidimensional* e *restrita* de aprendizagem dessa disciplina. Unidimensional porque sua concepção coloca todo o peso na dimensão cognitiva do ato de aprender matemática. A dimensão afetiva do processo de construção do saber - que até o próprio Bachelard, através da apropriação do conceito freudiano de 'psicanálise', havia destacado como imprescindível para a superação dos obstáculos - é completamente ignorada por ele. Não apenas a dimensão afetiva do processo de construção do conhecimento matemático é ignorada, como também as dimensões ideológica, valorativa e social.

Além disso, sua concepção de aprendizagem é *restrita*, uma vez que ela é vista unicamente como um processo cognitivo ininterrupto de superação de sucessivos obstáculos que se manifestam ao aluno no processo de enfrentamento de problemas prévia e cuidadosamente elaborados. De fato, para Brousseau[157],

> o objeto principal da didática é justamente estudar as condições que devem preencher as situações ou os problemas propostos ao aluno para favorecer a aparição, o funcionamento e a superação de suas concepções sucessivas [...] assim, os problemas mais interessantes serão aqueles que permitirão transpor um verdadeiro obstáculo. Foi devido aos problemas que eu me interessei por examinar a questão dos obstáculos em didática.

Se assim é, é preciso perguntar como é possível perceber, numa situação didática, que o aluno está de fato se defrontando com um obstáculo? Brousseau responderá que os obstáculos nunca se revelam *diretamente* ao professor ou ao investigador. Qual seria então o fator que os medeia? Para ele, os obstáculos só se deixam revelar através de *erros*[158]. Não, é claro, de quaisquer erros, mas apenas daqueles que não são fortuitos, isto é, que não são fruto do acaso. Como distinguir

---

157 (Brousseau, 1983, p. 172).
158 (Brousseau, 1983, p. 173).

os erros que são fruto do acaso daqueles que não o são? Para Brousseau, um erro que não é fruto do acaso é aquele que se mostra persistente e que pode ser reproduzido[159]:

> [...] eles não desaparecem radicalmente, de uma vez por todas, mas resistem, persistem e, sem seguida, ressurgem, manifestam-se por um longo tempo após o sujeito ter rejeitado o modelo defeituoso de seu sistema cognitivo consciente.

Isto posto, podemos retornar à natureza do pressuposto Brousseauniano de existência de um mecanismo da aquisição de conhecimentos que se preservaria, tanto na história da ciência e na epistemologia quanto no terreno do ensino e da aprendizagem.

O que Brousseau parece estar defendendo ao afirmar esse pressuposto é que haveria uma *lógica* idêntica e imutável que orientaria o processo de desenvolvimento do conhecimento matemático em todos esses níveis, qual seja, uma *lógica* que se traduziria pela superação de erros produzidos por obstáculos.

O ensino-aprendizagem da matemática, como em outras propostas anteriormente analisadas, passa, então, a ser visto também como o espelho da história, mas um espelho com a propriedade específica de refletir apenas e tão somente uma determinada forma, isto é, uma forma-padrão dos homens se comportarem no processo de produção e desenvolvimento do conhecimento.

Brousseau não chega, portanto, a romper com a *concepção especular* da relação entre história da matemática e ensino-aprendizagem da matemática. Consequentemente, a investigação em didática da matemática deverá ajustar-se a essa concepção especular e, nesse sentido, deverá manter com a história uma relação de dependência que se expressará na necessidade de nela se ancorar toda iniciativa de constituição de uma *engenharia didática*.

A afirmação da existência de uma *lógica* no desenvolvimento do conhecimento matemático faz o empreendimento Brousseauniano aproximar-se bastante daquele defendido por Lakatos[160], no plano exclusivamente histórico, embora Brousseau não faça referência a esse autor e nem a essa obra. Só que, em Lakatos, diferentemente do que ocorre em Brousseau e mesmo em Bachelard, o *papel da crítica pública* no processo de retificação dos erros desempenha um papel fundamental. Além disso, quando Brousseau defende a existência dessa *lógica*, mas

[159] (Brousseau, 1983, p. 174).
[160] Lakatos (1978).

ao mesmo tempo afirma que os obstáculos históricos não têm necessariamente seus equivalentes no pensamento da criança no processo escolar de construção do conhecimento, acaba desdobrando sutilmente a tese do paralelismo ontofilogenético, uma vez que, para ele, parece ser plausível sustentar simultaneamente a existência de uma *lógica* invariante orientadora do processo de desenvolvimento do conhecimento nos níveis considerados, lógica esta que se expressa pela superação de erros produzidos por obstáculos, e a inexistência dessa invariância no que se refere à natureza dos obstáculos a serem transpostos nesses mesmos níveis.

Ainda que esse ponto de vista, por si só, seja sustentável, penso que ele coloca alguns problemas para Brousseau. Admitindo-se a simultaneidade gerada por esse desdobramento, as questões que imediatamente podem ser remetidas a Brousseau são as seguintes:

1. se o que se preserva em todos os níveis é uma espécie de *lógica* de superação de erros produzidos por obstáculos, e não os obstáculos em si mesmos, por que deveria o investigador em didática da matemática dedicar-se à tarefa de identificação de obstáculos históricos, isto é, por que deveria ele recorrer à história da matemática? Não seria suficiente identificá-los unicamente ao nível do processo de construção escolar do conhecimento e dedicar-se, em seguida, à busca de alternativas pedagógicas para se enfrentá-los?
2. Por que deveria ele dedicar-se à complexa tarefa de constituição de uma 'epistemologia de uma noção ou conceito matemático' se não existe, a priori, qualquer garantia de que os obstáculos históricos que essa tarefa vier revelar venham a ter seus correspondentes ao nível didático? Que papel viria a cumprir uma tal epistemologia no plano da investigação didática e que relação teria ela com a análise histórica propriamente dita?

Brousseau não chega a dar diretamente respostas a essas questões porque nem mesmo as coloca a si próprio. No entanto, chegamos a afirmar anteriormente, nesta mesma seção, que Brousseau 'retoma' a mesma concepção Bachelardiana da relação entre história e epistemologia transpondo-a, sem problematizá-la ou mesmo tematizá-la, para o terreno da educação matemática. Com que legitimidade então podemos fazer uma tal afirmação?

Penso que essa afirmação se sustenta com base em uma análise do primeiro e mais famoso estudo específico realizado por Brousseau no qual a noção de obstáculo assume um papel central. Trata-se do estudo realizado em sua tese de doutorado, relativo aos problemas da construção do conceito de número decimal por parte de alunos da atualidade.

Interessa-me aqui, particularmente e tão somente, destacar o tipo de conexão que Brousseau estabelece implicitamente nesse trabalho entre o histórico, o epistemológico e o didático, tomando por base a referência Brousseau (1983). Diferentemente do que ocorre em Bachelard, em Piaget & García e em toda tradição filosófica relativa à teoria do conhecimento, com Brousseau - e a partir dele, também com outros -, a palavra *epistemologia* e toda a problemática em torno da qual esse campo da filosofia gira, deixa de referir-se meramente a questões amplas e gerais (tais como aquelas relativas à natureza e validação ou legitimação do conhecimento científico, do desenvolvimento do conhecimento, da passagem de um estágio de menor para outro de maior conhecimento, da natureza dos objetos que o constituem etc.) relativas ao conhecimento científico como um todo, ou a setores tradicionais e constituídos desse tipo de conhecimento (isto é, aos diversos campos do saber tais como a Física, a Biologia, a Matemática e, mais recentemente, a Educação Matemática etc.) e passa a aplicar-se também a noções ou conceitos matemáticos específicos. Em outras palavras, o universo referencial, isto é, o objeto da epistemologia fragmenta-se ainda mais a ponto de dotar-se de legitimidade expressões do tipo: *epistemologia dos números decimais*, *epistemologia dos números inteiros* etc. Mas em que sentido, no trabalho de Brousseau a que estamos fazendo referência, uma *epistemologia dos números decimais* diferiria de uma *história dos números decimais* propriamente dita?

É difícil chegar, pelas próprias palavras de Brousseau, a caracterizar uma tal suposta distinção, pois é dentro de uma seção de seu artigo, intitulada *história dos decimais*, que ele faz a seguinte advertência[161]:

> Não é possível no quadro deste artigo apresentar uma epistemologia dos decimais. Uma tal epistemologia está por ser feita. Esse empreendimento é difícil devido à *dispersão* no interior de um intervalo de quinze ou vinte séculos dos fatos a serem

[161] (Brousseau, 1983, p. 182, grifo nosso).

> levados em consideração. A cada "etapa" crê-se que não há senão mais um passo a transpor, mas não é isso o que ocorre, e que, raramente, se erraria se se tentasse transpô-lo. Tendo em vista esse fato, a pesquisa propôs-se então a compreender o que é que esse passo tinha de inconcebível, e também aquilo que se perderia em relação ao estado precedente.

O que se pode perceber por esta passagem é que, embora Brousseau acredite na existência de uma distinção entre análise histórica e análise epistemológica da noção de número decimal, conclui por uma questionável impossibilidade de se estabelecer tal diferenciação com base no frágil argumento da *dispersão* temporal dos fatos ligados a essa noção.

Ora, o fenômeno da dispersão temporal das idéias matemáticas - e de outros correlatos, tais como o da difusão e o da apropriação das mesmas - é apenas um dentre outros tantos problemas com os quais se defronta todo historiador que se situa no terreno da história das idéias matemáticas, e menos do que ver nesse fato uma limitação irreparável e impeditiva para se levar adiante a reconstituição histórica de uma noção, ele deve encará-lo, ao contrário, como algo a ser explicado.

A mesma obrigação se coloca também ao epistemólogo da matemática, quaisquer que sejam os objetivos distintivos de seu empreendimento em relação aos do historiador. O que seria da teoria do conhecimento ou da epistemologia se se vissem paralizadas diante do fato de o conhecimento achar-se temporalmente e/ou espacialmente disperso?

Por isso, penso poder explicar essa alegada impossibilidade de distinção por uma falta de clareza por parte de Brousseau em relação aos papéis distintivos a serem supostamente desempenhados pelas análises epistemológica e histórica. À falta dessa clareza, acaba reproduzindo alguns dos vícios de Bachelard quando se propõe a reconstituir, ainda que breve e resumidamente, a história dos números decimais.

De fato, a história (ou epistemologia?) dos números decimais não é senão um acúmulo temporalmente ordenado de fatos ligados a essa noção e que filtra apenas os acréscimos ou 'avanços' que diferentes indivíduos impuseram a essa sequência com o mero propósito de se detectar e destacar as insuficiências ou lacunas de uma etapa em relação às que lhe são precedentes.

Segue-se a essa história dos decimais propriamente dita uma outra história, isto é, a *história do ensino* dessa noção, encarada meramente sob o ponto de vista da difusão dessa noção *após* ela ter sido inteiramente constituída e completada na esfera da investigação e/ou atividade matemática propriamente dita. Mas essas histórias são constituídas por Brousseau com o nítido *propósito pedagógico* de se identificar nelas a presença de obstáculos epistemológicos de origem propriamente epistemológica, isto é, de obstáculos históricos.

É exatamente esse propósito orientador da análise histórica que nos permite inferir a importância e o papel desempenhado pela história da matemática no terreno da investigação didática. A importância da história reside no fato de ser ela vista como um repositório de obstáculos epistemológicos de origem epistemológica - dos quais os alunos da atualidade, inevitavelmente, não poderão escapar - e que apenas uma análise epistemológica conseguiria identificar.

De fato, esse papel pedagógico desempenhado pela análise epistemológica no pensamento de Brousseau é também ressaltado por Artigue[162]:

> Brousseau sublinha a importância, para o didata, da análise epistemológica, a qual permite a identificação dos obstáculos e a separação, dentre as dificuldades geralmente encontradas pelo ensino na aprendizagem de tal ou tal noção, daquelas *que são realmente inevitáveis*, porque constitutivas do desenvolvimento do conhecimento.

Mas se assim é, então, a única distinção que se evidencia entre análise histórica e análise epistemológica na concepção Brousseauniana dessa relação diz respeito à *natureza teleológica* da análise epistemológica relativamente à histórica. Em outras palavras, isso significa que, diferentemente da análise histórica, a análise epistemológica é *orientada por um fim explícito e consciente* (no caso de Brousseau, trata-se de um fim pedagógico-metodológico).

Mas, como já dissemos anteriormente em relação à concepção Bachelardiana da relação entre história e epistemologia, essa finalidade orientadora que preside a análise epistemológica, embora legítima, não a torna distinguível da análise histórica propriamente dita, cabendo, portanto, à concepção Brousseauniana da relação entre história e epistemologia as mesmas considerações críticas já feitas à de Bachelard.

Consequentemente, torna-se ambígua a tentativa Brousseauniana de se distinguir uma *epistemologia dos números decimais* de uma 'história dos números decimais' propriamente dita, uma vez que essa suposta epistemologia nada mais

[162] Artigue (1991, p. 250, itálicos nossos).

seria do que a tentativa de constituição de uma *nova história dos decimais* orientada por propósitos pedagógicos e intencionada em se pôr em evidencia obstáculos que supostamente intervieram no processo de desenvolvimento histórico dessa noção. E aí se revela a *posição hesitante e contraditória* (que assinalamos anteriormente) de Brosseau em relação à natureza dos obstáculos epistemológicos de origem epistemológica (os obstáculos históricos) pois, embora alegue não serem eles inevitáveis, eles acabam se impondo como inevitáveis; caso contrário, como explicar a necessidade de se recorrer à análise histórico-epistemológica no processo de investigação didática?

É possível afirmar ainda que, para Brousseau, os obstáculos epistemológicos de origem epistemológica (isto é, os obstáculos históricos) relativos a uma noção matemática não se manifestariam apenas na história dessa noção, mas também, na história do ensino dessa noção.

De fato, a seguinte passagem de Brousseau nos atesta que um obstáculo epistemológico de origem epistemológica pode também provir da história do ensino[163]:

> os esforços de vulgarização foram facilitados pela escolha do sistema métrico. A generosidade das intenções revolucionárias levou a se ensinar os "mecanismos" independentemente das justificações matemáticas (era preciso, em 3 anos, dar conta de tudo o que era essencial para o cidadão). Essas conquistas do século XIX irão criar obstáculos ao século XX quando se passa então a defender que não se trata mais de se comunicar a instrução, mas de educar, de fazer compreender.

Mas se as conquistas de um século podem transformar-se em obstáculos no século seguinte, então, surge o seguinte paradoxo que se expressa no fato de que alguns obstáculos epistemológicos *de origem didática* de hoje poderão ser vistos, num futuro próximo, como obstáculos epistemológicos *de origem epistemológica*, o que torna ambíguo todo o esforço feito por Brousseau no sentido de classificar e distinguir os obstáculos epistemológicos em função de sua origem.

Essa ambiguidade pode também ser constatada no estudo específico realizado por Brousseau referente aos números decimais.

Situando-se no contexto do ensino-aprendizagem da noção de número decimal, Brousseau identifica o que chama de o maior *obstáculo epistemológico de origem didática* que se coloca à aprendizagem significativa dessa noção por parte dos

[163] (Brousseau, 1983, p. 183).

alunos. Esse obstáculo consiste em se conceber e se tratar os decimais como *números naturais com vírgula* ou, em outras palavras, de se concebê-los mecanicamente como pares de números naturais justapostos e separados por uma vírgula.

A presença desse obstáculo poderia ser inferida, segundo Brousseau, com base em certos tipos de erros cometidos pelos alunos tais como: 1) o de se concluir pela não-existência de números decimais entre, por exemplo, 2,3 e 2,4; 2) o de se concluir, por exemplo, que 1,4 é menor do que 1,15 pelo fato de 4 ser menor do que 15; 3) o de se concluir que 0,3 X 0,3 = 0,9 porque 0 X 0 = 0 e 3 X 3 = 9; 4) o de se concluir que os números naturais não poderiam também ser concebidos como números decimais.

Com que legitimidade se atribui a esse obstáculo uma origem didática? Brousseau não se coloca tal questão mas, na seção denominada 'História do ensino dos decimais' de seu artigo que estamos considerando, ele faz o seguinte comentário[164]:

> A "vulgarização" dos decimais tornou-se, então, um problema de didática e foram necessários dois séculos para se dar o primeiro passo: com efeito, por exemplo, Gobain em 1711 não chegou a dá-lo em uma obra destinada aos comerciantes e d'Alembert em 1779, na Enciclopédia (no artigo 'Decimais'), apresentou a questão em sua forma matemática. Na edição de 1784 o padre Bossut apresentou os decimais à maneira de um naturalista: *são inteiros com uma vírgula que servem para representar medidas*. O aspecto fração decimal é relegado a um "apêndice". Uma fratura se anuncia entre as frações decimais e os "decimais populares", aqueles algoritmos maravilhosamente simples que permitiam vulgarizar totalmente a contabilidade comercial.

Como interpretar uma tal afirmação? Estaria Brousseau, com isso, querendo dizer que um tal tipo de concepção de número decimal, por ter-se manifestado no *âmbito da história do ensino* dessa noção poderia ter-se transformado em obstáculo epistemológico *de origem epistemológica* (obstáculo histórico) para o ensino da atualidade? Em caso afirmativo, como conciliar esse fato com a sua identificação anterior como um obstáculo epistemológico de *origem didática*? No caso de se negar o seu status de obstáculo epistemológico de origem epistemológica, por ter-se manifestado no âmbito do ensino, com base em que critérios seria possível defender a existência de uma linha de demarcação rígida entre a história dos decimais e a história do seu ensino?

---

[164] (Brousseau, 1983, p. 183, itálicos nossos).

Além desse obstáculo epistemológico de origem ambígua (didática ou epistemológica?) Brousseau, em seu estudo, apresenta-nos ainda dois outros obstáculos classificados agora como "verdadeiramente epistemológicos e históricos"[165]: 1) o da simetrização do conjunto dos números naturais pela multiplicação e pela construção do conjunto dos números decimais como forma de se aproximar o conjunto dos racionais; 2) o da concepção dos números decimais e racionais como razões ou então como aplicações lineares operando sobre o conjunto dos racionais.

No primeiro caso, trata-se de se mostrar a possibilidade de se conceber algumas frações por meio do mecanismo de se determinar o número que multiplicado por um número natural produz 1 e também de se mostrar a possibilidade de se ordenar ou mesmo adicionar frações mediante o mecanismo de determinação dos números decimais aproximados que lhes correspondem.

No segundo caso, trata-se de mostrar como o modelo linear constitui um obstáculo para outros modelos (por exemplo, a função linear constitui um obstáculo para a interpretação de situações cuja enfrentamento requer o emprego de funções tais como $y = ax$, $y = x^2$, $y = 1/x$. Exemplo de uma situação desse tipo seria aquela em que se tem um vaso em forma de V e cujo volume é K, contendo água até a metade de sua altura, e pergunta-se qual é o volume ocupado pela água) ou, particularmente, como o modelo aditivo se constitui em obstáculo para o modelo multiplicativo (por exemplo, a concepção da multiplicação como uma adição reiterada constitui um obstáculo para se introduzir a multiplicação de números decimais tal como, por exemplo, 8,3 X 4,2 ou então, para o enfrentamento de situações-problema tais como a seguinte: Tem-se uma foto de 5 por 9 e quer-se ampliá-la de maneira que o lado de 5 cm passe a ter 7 cm. Quanto deve medir o outro lado?)[166].

Embora Brousseau qualifique tais obstáculos epistemológicos de "verdadeiramente históricos", não nos apresenta sequer um episódio histórico que possa justificar uma tal qualificação. É, portanto, procedente a seguinte crítica que lhe é feita por Artigue[167]:

---

[165] (Brousseau, 1983, p. 186).
[166] (Higueras & Fernández, 1989, p. 128-129).
[167] (Artigue, 1991, p. 250).

> Mas a prova de sua qualidade de obstáculo epistemológico não é, na vedade, fornecida e a análise tende a se diluir na apresentação de situações de ensino concebidas com o fim de se permitir a superação de tais obstáculos.

Ressaltamos até o momento que não apenas a noção Bachelardiana de obstáculo epistemológico é geradora de polêmica como também tentamos apontar algumas lacunas e contradições geradas pela importação dessa mesma noção por Brousseau para o interior do terreno da investigação em didática da matemática. Mas essa polêmica atingiu maiores proporções a partir do momento em que novos trabalhos de investigação, principalmente no interior da escola francesa de didática da matemática, foram sendo desenvolvidos com base nessa noção. A primeira dessas polêmicas opôs o próprio Brousseau a Glaeser.

3.4. Georges Glaeser, os obstáculos epistemológicos e o papel da história da matemática na investigação acadêmica em Educação Matemática

Talvez, uma das primeiras investigações a se utilizar da noção de *obstáculo epistemológico* no terreno da educação matemática, logo após a comunicação de Brousseau no XXVIII Encontro CIEAEM (Louvain, 1976), tenha sido a de Georges Glaeser, professor da Universidade Louis Pasteur (Estrasburgo).

Georges Glaeser (1918-2002)[168]

A comunicação dessa investigação foi feita por Glaeser na revista *Recherches en Didactique des mathématiques,* vol. 2, n. 3, 1981, dois anos antes, portanto, da publicação, neste mesmo periódico, sob o título *Les obstacles*

---

[168] Georges Glaeser foi um matemático e educador matemático francês, diretor do IREM de Strasbourg, que ficou conhecido entre os educadores matemáticos, sobretudo devido a uma investigação historiográfica que realizou acerca dos números relativos.
Acesso foto: (http://www.espace-sciences.org/archives/science/13304.html).

épistémologiques et les problèmes en mathématiques, da comunicação, revista e ampliada, de Brousseau feita em Louvain.

Do mesmo modo que Brousseau decide realizar uma *epistemologia dos decimais*, também Glaeser dedica-se à tarefa de realizar uma *epistemologia dos números relativos*.

As razões que motivaram a realização de ambos os estudos parecem ser coincidentes, como também parecem ser consonantes as concepções de didática da matemática defendidas por ambos. De fato, assim se expressa Glaeser[169] logo no primeiro capítulo de seu estudo:

> Um dos mais importantes objetivos da didática da matemática é determinar os obstáculos que se opõem à compreensão e à aprendizagem dessa ciência. Para isso, ela utiliza métodos científicos que comportam, de um modo geral, duas fases: inicialmente, o pesquisador coleta um *corpus* constituído pela produção escrita ou oral dos indivíduos estudados. Essa documentação é, em seguida, trabalhada a fim de que conclusões possam ser formuladas sobre a existência, a natureza e a localização de *barreiras* a serem transpostas.

A seguir, Glaeser procede a uma distinção entre o que chama *métodos experimentais* e *métodos históricos e epistemológicos*, com base na crença de que caberia aos métodos experimentais em didática elaborar ou preparar situações didáticas facilitadoras da superação por parte dos estudantes das diversas barreiras que a eles se apresentam no processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos enquanto que, aos métodos históricos e epistemológicos, caberia a tarefa de se investigar de que modos a produção pedagógica, escrita e/ou oral, dos sujeitos estudados poderia, de alguma forma, ser confrontada com os vestígios do passado.

Desse modo, os métodos históricos e epistemológicos, diferentemente dos experimentais, trabalhariam “sobre documentos deixados por grandes matemáticos ou por representantes típicos da comunidade científica de épocas revisitadas”[170].

A partir dessa distinção metodológica, é possível inferir que, do mesmo modo que para Brousseau, Glaeser não tem clareza sobre o papel diferencial a ser desempenhado pela epistemologia em relação à história. O próprio fato de Glaeser situar os métodos históricos e os epistemológicos numa mesma categoria,

---

[169] (Glaeser, 1981, p. 304, itálicos do autor).
[170](Glaeser, 1981, p. 304).

atribuindo-lhes o mesmo papel ou função, nos atesta isso. Se, de fato, cabe aos métodos epistemológicos trabalharem sobre documentos ou vestígios do passado, em que eles se distinguiriam dos métodos históricos? E, de duas uma: ou a epistemologia acaba sendo assimilada à história - e, neste caso, a análise histórica e a epistemológica em nada se diferenciariam - ou, tal como em Brousseau, a epistemologia se diferenciaria da história por ser um empreendimento orientado por certos fins, ou melhor, por ser um empreendimento pedagogicamente ou didaticamente orientado.

Além disso, o que dissemos a respeito do modo como em Brousseau se procede a uma fragmentação do objeto da epistemologia, vale também para Glaeser. Porém, há uma diferença bastante nítida entre os dois empreendimentos - o de Brousseau e o de Glaeser: enquanto o primeiro, em sua *epistemologia dos decimais*, antepõe o objetivo didático ao histórico-epistemológico fazendo dele o guia para este último tipo de análise, para retornar, em seguida ao terreno da didática, o segundo, em sua *epistemologia dos números relativos*, dedica-se *exclusivamente* ao terreno da análise histórico-epistemológica, deixando o retorno ao plano didático para outros que por ele se interessem.

De fato, embora Glaeser alegue, como ressaltamos acima, a necessidade de uma *motivação* didática para se proceder a uma incursão pelo terreno da história e da epistemologia da matemática e para que os dados pedagógicos sejam confrontados com os vestígios históricos, o estudo que realizou não faz qualquer menção a esse tipo de análise prévia. Quanto a um possível retorno ao plano didático, ele esclarece[171]:

> Não seria sinal de precipitação pedagógica tentar aplicar toda a sequência deste estudo em sala de aula. Na realidade, colocamos em evidência, através do exame de todos os documentos históricos que nos foram acessíveis, um certo número de obstáculos que se contrapuseram ao progresso no curso da história. Resta agora realizar experiências com os alunos a fim de se buscar saber se alguns desses obstáculos não teriam ainda consequências atuais.

Glaeser é também suficientemente explícito a respeito de sua concepção da relação entre a história da matemática e o ensino-aprendizagem.

Novamente, o ensino-aprendizagem da matemática é visto como o espelho real ou provável da história da matemática, e esta última aparece ao investigador

---

[171] (Glaeser, 1981, p. 344-345).

em educação matemática como um 'laboratório' ou campo dotado de legitimidade, não apenas para se identificar os bloqueios e dificuldades por que passam os alunos da atualidade no processo escolar de construção da matemática, como também para se interpretá-los e buscar formas para a montagem de situações didáticas superadoras dos mesmos. De fato, logo no resumo de seu estudo ele esclarece[172]:

> Um estudo detalhado de trabalhos dos melhores matemáticos - de Diofante, Euler, d'Alembert etc. - permitiu observar alguns dos obstáculos que se opuseram à aquisição da noção de número negativo e, consequentemente, à regra dos sinais. Gostaríamos que fosse examinado, através de numerosas experiências, se as dificuldades vivenciadas pelos grandes matemáticos são as mesmas que perturbam os jovens estudantes de hoje.

Mas se as dificuldades e os obstáculos identificados no *laboratório virtual* da história gozam apenas da propriedade de *possibilidade* de manifestação no 'laboratório real' da sala de aula, por que realizar a análise histórico-epistemológica, isto é, por que não fazer esse trabalho de detecção diretamente no 'espaço real' da sala de aula? E mesmo que as dificuldades e os obstáculos gozassem da propriedade de *certeza* de manifestação total ou parcial na sala de aula, de que teria valido o trabalho histórico de identificação?

No fundo, tanto em Brousseau quanto em Glaeser parece persistir a esperança, baseada numa espécie de *crença indutivista proativa*, de que a análise histórico-epistemológica possa, de alguma forma, iluminar ou indicar o rumo a ser dado à prática pedagógica e à prática da investigação pedagógica.

É claro que, a fim de se confrontar com qualquer tipo de crítica a essa crença, sempre lhes resta o argumento da possibilidade de se checar e de se controlar essa esperança no *laboratório de última instância - firme e seguro -* da sala de aula. Mas, se assim é, por que não manter-se nele desde o início? Por que dedicar-se ao trabalho extra de ter que retificar algo que poderia ter sido realizado uma única vez com base nas *razões da prática*? Se a prática pedagógica atual é vista ao mesmo tempo como critério de verdade, fonte de alternativas, última instância legitimadora das decisões e luz que guia as nossas ações, por que recorrer à pálida luz segunda da história?

---

[172] (Glaeser, 1981, p. 303).

Diante desses esclarecimentos e dessas considerações críticas, penso que deve-se olhar para o trabalho de Glaeser como um trabalho de *natureza histórica* propriamente dita e é nesse âmbito que deve ser avaliado. E, nesse sentido, uma primeira crítica global que poderia ser feita ao estudo realizado por ele é da mesma natureza que aquela já feita ao trabalho de Bachelard.

O próprio fato de se tentar interrogar o passado com base na noção de *obstáculo* já significa ter feito uma dupla opção, ambas polêmicas e questionáveis, no terreno da filosofia da história, quais sejam:

- Opção por uma *concepção indutivista retroativa* da história da matemática que consiste na elaboração de uma reconstituição do desenvolvimento de um tópico com base num julgamento e projeção ilegítimos dos resultados da matemática contemporânea sobre aqueles elaborados por nossos antepassados.
- Opção pelo pressuposto de que o curso da história da matemática seria governado pela noção de progresso.

No entanto, essa concepção indutivista retroativa ilegítima, cuja presença já havíamos constatado e denunciado na obra de Bachelard, permitirá a Glaeser identificar seis obstáculos que teriam se manifestado no desenvolvimento histórico da noção de número relativo:

- *Inaptidão* para manipular quantidades negativas isoladas, a qual se atestaria historicamente pela presença nos textos de alguns matemáticos investigados daquilo que Glaeser denomina *sintoma da evitação* no emprego dos números negativos. Apesar dessa evitação, esses matemáticos, segundo Glaeser, se viram indiretamente obrigados a introduzi-los devido ao fato de seu uso, na prática do cálculo, conduzir a resultados exatos, sugerindo-lhes o apego à "inescrupulosa" crença de que o êxito computacional justificaria o emprego de quantidades negativas isoladas;
- *Dificuldade* para dar um sentido a quantidades negativas isoladas;
- *Dificuldade* de unificar a reta numérica, a qual se traduz ou pode ser inferida com base na frequência com que se insiste e persiste na crença da necessidade de se distinguir qualitativamente as quantidades negativas e os números positivos. A existência histórica dessa crença poderia ser atestada

por certas passagens presentes nas obras dos dez matemáticos investigados (Diofante, Simon Stevin, René Descartes, Colin McLaurin, Léonard Euler, Jean d'Alembert, Lazare Carnot, Pierre de Laplace, Augustin Cauchy e Herman Hankel) nas quais se procura descrever a reta como uma justaposição de duas semi-retas opostas portando símbolos heterogêneos;

- A ambiguidade dos dois zeros, estado este cuja existência se atestaria historicamente pela constatação de uma certa *inaptidão* ou *dificuldade* de se proceder a uma distinção entre o zero absoluto e o zero origem nos textos de alguns matemáticos investigados;
- A *estagnação* no estágio das operações concretas (por oposição ao estágio das operações formais), estado este cuja existência se atestaria historicamente pela constatação de uma certa *dificuldade* de se livrar do desejo de se atribuir um sentido concreto aos entes numéricos;
- *Desejo* de construir um modelo unificador, isto é, um modelo que fosse igualmente válido e aplicável para a realização, compreensão e validação das operações fundamentais com os números relativos[173].

Um fato imediatamente perceptível no modo como Glaeser enuncia a sua *lista provisória* de obstáculos é o uso de termos psicológicos - tais como *inaptidão*, *dificuldade* e *desejo* - e psico-sociológicos tais como *sintoma* e *estagnação*. Mas mesmo esses dois últimos termos acabam sendo psicologizados pelo autor, uma vez que, para ele, *sintoma* se refere sempre a um *estado psicológico-cognitivo* do sujeito inferível a partir do modo como ele lida com um problema ou noção matemática e *estagnação* diz respeito ao *momento ou estágio psicológico de natureza cognitiva* no qual se situa e/ou se detém o sujeito no que se refere ao modo de lidar com um problema ou idéia matemática.

Alguns desses termos, tais como *dificuldade* e *inaptidão* nos sugerem imediatamente um uso implícito por parte do autor de uma certa concepção da noção de obstáculo epistemológico muito próxima à de um estado mental de *privação*, *ignorância* ou *ausência de conhecimento* por parte do sujeito, ou então, de uma *ausência de dotes naturais* ou *aptidão* por parte do sujeito para o enfrentamento de determinados problemas, ou ainda, de um *estado mental* caracterizado por um certo *grau de consciência* por parte do sujeito de seu distanciamento em relação a um objetivo a ser atingido.

O termo *desejo*, por sua vez, nos sugere um estado de *disposição mental de natureza afetivo-cognitiva* de se tentar projetar inconscientemente nos objetos conceituais da matemática as nossas expectativas em relação ao modo como gostaríamos que eles funcionassem e/ou recebessem a sua validação. E daí, uma nova concepção implícita da noção de obstáculo epistemológico acaba se manifestando, qual seja, a de uma espécie de *crença inconsciente-inconsistente-irracional* imposta pelo sujeito aos objetos conceituais.

Finalmente, o uso do termo *estagnação*, tal como o explicitamos acima, para se referir a obstáculos epistemológicos, nos sugere uma outra forma de se concebê-los, qual seja, como uma espécie de *situação de bloqueio cognitivo*, isto é, de ausência de possibilidade de avanço intelectual no enfrentamento de um problema.

É útil ressaltar que algumas dessas concepções implícitas da noção de obstáculo epistemológico afastam-se consideravelmente daquela apresentada por Bachelard, para quem obstáculo epistemológico era entendido, antes de mais nada e, sobretudo, como uma *situação de conhecimento*.

Além disso, essa análise semântica dos termos utilizados por Glaeser para se referir aos obstáculos epistemológicos nos revela uma sobreposição ambígua e muitas vezes contraditória de concepções. Com que legitimidade poderíamos então colocar essa noção no centro da explicação histórico-epistemológica da noção de número relativo?

Seria desnecessário insistirmos também no ponto de quão problemático e questionável seria colocar o emprego de tais construtos de natureza psicológica - polêmicos mesmo no interior do próprio terreno da psicologia contemporânea - na base da explicação histórica. Isso acabou levando Glaeser a realizar uma reconstituição internalista, subjetivista e personalista da história dos números inteiros relativos, na qual o contexto social não desempenha nenhum papel significativo, e na qual grandes matemáticos do passado acabam aparecendo aos olhos dos contemporâneos como seres ingênuos e, às vezes, até mesmo estúpidos,

---

[173] (Glaeser, 1981, p. 308, grifos meus).

por não terem conseguido 'ver' coisas tão triviais e elementares como as que hoje reconhecemos.

De fato, a passagem seguinte é apenas uma, dentre muitas, nas quais Glaeser deixa transparecer esse preconceito injustificável[174]:

> Resumindo, nós encontramos textos em que grandes sábios revelam, com maior ou menor espontaneidade, índices de incompreensão sobre o tema, tão banal, dos números relativos. Mas nossa surpresa não faria senão crescer diante das sínteses de d'Alembert e Carnot, que não hesitaram em *ostentar a sua incompreensão* sem a menor inibição.

Segue-se a essa observação tão descabida e desconectada do seu contexto histórico um trecho do artigo "Negativo" escrito por d'Alembert à Enciclopédia de Diderot.

Esse mesmo tipo de censura ou julgamento histórico desautorizado, por lamentar ou surpreender-se com a ausência entre nossos antepassados de formas de comportamento, visão de mundo, concepções etc., presentes no mundo contemporâneo, também estava presente, como já ressaltamos anteriormente, nas análises histórico-epistemológicas da matemática desenvolvidas por Piaget. Não devemos nos surpreender, portanto, com a afinidade dos pressupostos teóricos em relação à história que orientam as análises desses dois autores.

De fato, logo no início de seu artigo, Glaeser inspira-se na seguinte passagem extraída da *Introdução à Epistemologia Genética* de Piaget - não para contestá-la, mas tão somente para julgá-la incompleta - na qual o mesmo tipo de *censura indutiva retroativa* combinada com o destacamento de uma presumida característica da personalidade de um sujeito, desligada das circunstâncias históricas nas quais ele pensa, atua e produz, é feita, uma vez mais, ao ilustre d'Alembert[175]:

> tais hesitações do grande d'alembert são particularmente instrutivas quanto à natureza ativa e não estática do número negativo e do número inteiro em geral. de fato, está claro que, se concebermos toda noção matemática como resultante da percepção, o número negativo não seria justificável, pois corresponderia a uma ausência de percepção, ou ainda menos, e percepções nulas não são suscetíveis de gradação. *Espantoso* é que essa contradição entre a interpretação sensualista do conhecimento e a realidade matemática não tenha levado *um espírito tão voltado para o concreto pouco dado às considerações mecânicas* como d'alembert a entender que a natureza essencial do número não é nem estática e nem perceptiva e, sim, dinâmica e ligada à própria ação, interiorizada em operações.

---

[174] (Glaeser, 1981, p. 323, grifos do autor e que também são nossos por outras razões que não as dele).

[175] (Piaget, apud Glaeser, 1981, p. 306, grifos nossos).

Uma interpretação alternativa e contextualizada da história dos números inteiros relativos, não mais de natureza subjetivista, personalista e retroativo-indutivista como as empreendidas por Piaget e Glaeser, e, portanto, muito mais esclarecedora, foi aquela proposta por Schubring (1986) num artigo intitulado *Ruptures dans le status mathématique des nombres négatifs*, publicado em 1986 na revista francesa *Petit x*.

Neste artigo, o autor nos mostra, contrariamente às interpretações de cunho personalista, subjetivista e universalista no terreno da história das idéias matemáticas, a possibilidade de *coexistência* de *histórias diferenciadas* dos números inteiros relativos em função dos estatutos diferenciados de que gozava esse tipo de número no interior de comunidades matemáticas de países distintos (no artigo citado, o autor analisa o caso da França, da Inglaterra e da Alemanha, países que, desde a segunda metade do século XVIII, possuíam as maiores comunidades de matemáticos).

Com isso, esse autor acaba explicitando e voluntariamente reforçando a tese do *papel orientador e eficaz das representações epistemológicas no desenvolvimento da matemática,* o que significa defender implicitamente uma nova forma de se conceber a relação entre história e epistemologia da matemática, diferente daquelas sugeridas por Piaget & García, Brousseau e Glaeser. Assim se expressa o autor a este respeito[176]:

> As principais fontes nas quais me baseei foram livros-texto de aritmética e álgebra, além de monografias e artigos de revistas. Encontrei não apenas um debate sobremodo amplo e intensivo sobre o status dos números negativos, mas também claras diferenças nacionais a respeito do reconhecimento desses números como legítimos conceitos matemáticos. De passagem lembro que, no contexto da segunda metade do século XVIII, estas diferenças abrangiam posicionamentos tanto de rejeição quase absoluta na Inglaterra, de ambivalência na França, quanto de clara aceitação na Alemanha. Estas atitudes refletiam a posição das respectivas comunidades matemáticas como um todo, uma vez que à época ainda não existiam comunidades de matemática escolar.

Tendo em vista, segundo Schubring, que a comunidade matemática inglesa teria se deixado influenciar por uma espécie de filosofia do senso comum, no contexto desse país negava-se completamente a possibilidade de que, numa subtração, o subtraendo pudesse ser maior do que o minuendo, ou que uma

[176] (Schubring, 1998, p. 19).

equação de segundo grau pudesse admitir duas raízes ou ainda que pudessem existir duas raízes quadradas de um mesmo número.

O oposto teria se passado no caso da Alemanha, país cuja comunidade matemática teria se deixado influenciar por uma espécie de filosofia que não punha objeções ao fato de que um conceito pudesse ser elaborado sem que possuísse um correlato no mundo material. Além disso, nesse país, a *teoria* dos números inteiros relativos retirava o seu fundamento de uma *teoria filosófica das grandezas opostas* que admitia a possibilidade de que as grandezas pudessem se opor em relação a uma qualidade e, quando relacionadas, pudessem anular-se mutuamente. Isso teria estimulado o surgimento de um conjunto de livros didáticos nos quais foram introduzidos um conceito geral de subtração que admitia também a possibilidade do minuendo ser menor do que o subraendo.

Finalmente, no caso da França, poder-se-ia dividir o debate em torno dos números inteiros relativos em dois momentos. No momento anterior a 1800, a comunidade matemática francesa teria se deixado governar por um comportamento ambíguo, o qual se manifesta na famosa Enciclopédia de Diderot/ d'Alembert que apresenta duas representações opostas em relação às quantidades negativas: uma defendida pelo próprio d'Alembert, que rejeitava a possibilidade de os números negativos poderem ser encarados como soluções de equações representativas de algum problema, e uma outra que concebia as quantidades negativas como 'menores do que nada' atribuindo a elas o mesmo estatuto das positivas. A partir de 1800, porém, a comunidade matemática francesa, comungando com o giro empírico ocorrido na filosofia desse país, ter-se-ia deixado influenciar de forma generalizada por uma espécie de fixação empírico-geométrica dos conceitos matemáticos básicos - posição esta transposta para o terreno da matemática por Carnot - a qual teria rompido com a relativa aceitação das quantidades negativas vigente no período anterior[177].

Schubring, em sua história alternativa dos números inteiros relativos, chega a extrair conclusões bastante diferentes daquelas que nos forneceu Glaeser.

Uma primeira é a de que a tão comentada regra dos sinais, contrariamente àquilo que defendeu Glaeser, não teria chegado a constituir um problema perturbador para a comunidade matemática, isto é, não teria chegado a constituir um verdadeiro obstáculo epistemológico de origem epistemológica e sim de origem didática.

Uma segunda é que a atribuição do estatuto de número aos inteiros relativos não pode ser encarada como uma questão meramente técnica e, nesse sentido, seria natural e historicamente legítimo defender a existência de uma *resistência epistemológica* no processo de desenvolvimento histórico dessa noção.

Mas é útil ressaltar que a *palavra epistemologia* é usada por Schubring em seu sentido clássico, isto é, como um meta-saber de natureza filosófica sobre a matemática. Daí, por *resistência epistemológica* ele entende o apego por parte da comunidade matemática a uma concepção clássica da matemática que a entendia como a *ciência das grandezas*, concepção esta que, de fato, oferecia uma resistência para se atribuir aos inteiros relativos o estatuto de número, uma vez que uma decisão dessa natureza implicava numa nova atitude perante a matemática, isto é, concebê-la como uma ciência não-empírica[178].

Finalmente, uma terceira e importante conclusão, com repercussões no terreno da investigação em didática da matemática, é por ele expressa do seguinte modo[179]:

> [...] por mais importantes que sejam os fatores epistemológicos para o desenvolvimento da matemática numa ou noutra direção (o conceito dos números negativos teve consequências significativas para outros domínios da matemática), os números negativos não podem ser tomados como demonstração positiva da eficácia dos obstáculos no sentido de Bachelard. Para Bachelard os obstáculos epistemológicos têm um sentido normativo; eles representam etapas do progresso intelectual necessário da humanidade em direção a um domínio sempre científico-racionalista do mundo. Quem não superou algum obstáculo é, portanto, alguém que ficou para trás. Agora pode-se afirmar com segurança que o conceito unívoco de grandeza, no sentido de Bachelard, foi uma "generalização precipitada" que impediu interessantes diferenciações como, por exemplo, o conceito de função e de variável. De outro lado, aparece muito claramente em Carnot que epistemologias alternativas lhe são conhecidas e que ele faz uma opção consciente. Penso que uma tal escolha não pode ser assimilada à noção de obstáculo no sentido de Bachelard. Parece-me antes essencial assinalar que não existe uma generalidade total no sentido de Bachelard: o desenvolvimento de conceitos ocorre no interior de determinados grupos sociais, sendo influenciado pelos respectivos contextos culturais. Por esta razão, também não existe uma absoluta simultaneidade ou paralelismo no desenvolvimento de conceitos em diferentes culturas.

---

[177] (Schubring, 1998, p. 19-20).
[178] (Schubring, 1998, p. 22).
[179] (Schubring, 1998, p. 22-23).

Como seria de se esperar, o estudo realizado por Glaeser sobre os números inteiros relativos iria suscitar polêmica entre os próprios investigadores pertencentes à escola francesa de didática da matemática.

A primeira e mais forte reação crítica viria da parte do próprio Brousseau, crítica esta que acha-se incorporada na segunda parte do artigo referente à sua comunicação no XXVIII Encontro CIEAEM (Louvain, 1976), publicado em 1983.

O principal ponto de divergência assinalado por Brousseau diz respeito ao fato de Glaeser não ter *deliberadamente* distinguido a noção de obstáculo de outras que lhe são proximas, tais como a de *dificuldade*, *resistência*, *barreira*, *sintoma* etc.

Destaquei o advérbio *deliberadamente*, porque o próprio Glaeser, em uma nota de rodapé de seu artigo, tomou a decisão consciente de não proceder a essa distinção por julgá-la ainda precoce[180]:

> A partir do momento em que Gaston Bachelard (1938) destacou a noção de obstáculo epistemológico (em relação à Física), muitos autores esforçaram-se por delimitar essa idéia, por precisá-la e por ajustá-la ao terreno da matemática. Após Guy Brousseau, eu mesmo cheguei a fazer algumas tentativas nesse sentido. Neste artigo, as palavras "obstáculos, dificuldade, barreira e sintoma" serão utilizadas de forma bastante ingênua. Isso porque, estou convencido de que é prematuro atrelar esses conceitos a formulações muito rígidas. Só após a realização de numerosos trabalhos, estaremos em condições de julgar as distinções pertinentes, úteis para o desenvolvimento da didática experimental. Assim, deverão ser rejeitadas aquelas que, embora sedutoras a priori, acabaram pondo em risco o empreendimento de constituição desses "conhecimentos mal elaborados" que se opuseram ao progresso.

Brousseau deverá opor-se, e a nosso ver com razão, a essa atitude deliberada por parte de Glaeser de ter-se utilizado informalmente do termo *obstáculo epistemológico*, uma vez que isso o teria levado a equivocar-se em considerar como obstáculos, dificuldades que, na realidade, não poderiam ser consideradas como tal, tais como "a inaptidão de manipular quantidades negativas isoladas" e "a dificuldade de se atribuir um sentido a quantidades negativas isoladas", dois dos obstáculos assinalados por Glaeser.

Os argumentos oportunos e contundentes de Brousseau acham-se contidos na seguinte passagem do seu artigo[181]:

> Esta formulação mostra *aquilo que faltaria* a Diofanto ou a Stevin, *visto de nossa época*, em nosso sistema atual. Manifestamos dessa forma um saber ou uma possibilidade que falta ao século XV e que impede de dar a "boa" solução ou a formulação adequada. Mas essa formulação *mascara a necessidade de compreender*

[180] (Glaeser, 1981, p. 304, grifos do autor).
[181] (Brousseau, 1983, p. 190-191, grifos meus).

> por quais meios eram abordados os problemas que requeriam a manipulação de quantidades negativas isoladas. Esses problemas eram, de fato, colocados? Como eram resolvidos? Acreditava-se poder resolvê-los? Aquilo que nos aparece hoje como uma dificuldade *era percebido da mesma forma naquela época*? Por que aquele "estado de conhecimentos" parecia suficiente? Para o ataque a que tipo de conjunto de questões ele se mostrava eficaz? Quais vantagens trazia a "recusa" de se manipular quantidades negativas isoladas ou quais inconvenientes essa "recusa" permitia evitar? Esse "estado de conhecimentos" era estável? Por que as tentativas de modificá-lo ou sobretudo de renová-lo teriam sido postas em xeque naquele momento? Teria sido, talvez, devido à espera pelo surgimento de novas condições e pela conclusão de um trabalho "lateral"? Essas questões são necessárias para se entrar na intimidade da construção de conhecimentos, mas Glaeser não as colocou...

Negritei algumas palavras desse comentário crítico de Brousseau não apenas para ressaltar a pertinência e a semelhança dessa crítica quanto a Glaeser – que põe em evidência a ilegitimidade do emprego do pressuposto indutivista retroativo nas análises históricas - em relação àquela que fizemos anteriormente, como também para expressar a minha surpresa diante do fato de esse mesmo tipo de crítica nunca ter sido feito por Brousseau ao próprio Bachelard.

De qualquer maneira, a partir dessa justa crítica, todas as controvérsias e análises empreendidas pelos componentes da 'escola francesa' contemporânea de didática da matemática - e também de alguns outros investigadores não pertencentes a ela - em relação ao uso da noção de obstáculo epistemológico nas investigações didáticas - incluindo as do próprio Brousseau - encaminhar-se-ão no sentido de 'salvar' essa noção Bachelardiana por meio, dentre outras, de tentativas tais como: refinamento e ajuste da mesma a fim de torná-la impermeável às críticas; confronto e tentativas de distinção dessa noção de outras muito próximas a ela, tais como as noções de *dificuldade*, *erro* e *conflito cognitivo*; delimitação das condições de seu uso nas investigações didáticas; desenvolvimento de novas investigações, mais cuidadosas e mais conscientes dos riscos gerados pelo emprego dessa noção e desenvolvimento de novas e mais profundas reflexões em torno da relação entre história, epistemologia e didática da matemática. Passaremos a comentar, ainda que brevemente, algumas dessas iniciativas.

3.5. Breves comentários sobre as iniciativas de Brousseau para *salvar* a noção de *obstáculo epistemológico*.

Em primeiro lugar, Brousseau deverá explicitar e esclarecer as razões pelas quais a pesquisa de obstáculos epistemológicos é útil e frutífera para a didática da matemática. São basicamente três as razões alegadas:

1. porque os obstáculos podem ser, de fato, identificados na história da matemática;
2. seus vestígios ou sinais podem ser re-encontrados nos modelos espontâneos dos alunos;
3. as condições pedagógicas de sua "superação ou de sua rejeição podem ser estudadas com precisão de forma a se propor aos professores um projeto didático preciso"[182].

Em segundo lugar, a própria crítica dirigida a Glaeser levará Brousseau a tentar refinar a noção de obstáculo epistemológico a fim de distingui-la da noção de 'dificuldade'. Ele procurará fazer isso baseando-se nos critérios anteriormente propostos por Duroux em um artigo intitulado *La valeur absolue: dificultés majeures pour une notion mineure*, publicado em 1982 pela revista *Petit x* n. 3.

O *primeiro critério* é que um obstáculo epistemológico é sempre *um conhecimento* e não um estado de ausência de conhecimento. Nesse sentido, ainda que os obstáculos possam ser detectados entre as dificuldades, estas deverão ser sempre reformuladas a fim de serem caracterizadas como conhecimentos propriamente ditos, ainda que falsos, incompletos etc.

O *segundo critério* a ser levado em consideração é o de que o conhecimento-obstáculo deve possuir tanto um domínio no qual ele se revele pertinente, válido e eficaz, como também um domínio no qual esse mesmo conhecimento se revele inadaptado, falso ou ineficaz e, portanto, uma fonte de erros.

Um *terceiro* e último *critério* que deve ser levado em conta na caracterização de um obstáculo diz respeito ao fato de todo conhecimento-

---

[182] (Brousseau, 1983, p. 190).

obstáculo ser um tipo de conhecimento que oferece uma *resistência que deve ser identificada, atestada e explicada*[183].

À primeira vista, esses critérios poderiam parecer razoáveis pois, além de parecerem gozar de uma certa objetividade, eles poderiam aplicar-se tanto para a caracterização de obstáculos históricos, isto é, obstaculos epistemológicos de origem epistemológica quanto aos obstáculos de origem didática. Mas penso que uma primeira dificuldade surge quando se pretende aplicar tais critérios tanto na pesquisa histórico-epistemológica quanto na investigação na sala de aula. Isso porque, em momento algum Brousseau preocupa-se em dizer-nos o que entende por conhecimento, noção central, segundo ele, para a caracterização de um obstáculo. Tratar-se-ia apenas de um saber estritamente técnico ligado ao domínio das matemáticas ou incluiria também o saber global que procuramos acionar quando estamos diante de uma situação problemática? Aquilo que Brousseau denomina *conhecimento* incluiria também *meta-conhecimento*, isto é, concepções e/ou crenças sobre o conhecimento acionado no ato de enfrentamento de uma situação problema? E as disposições afetivas, motivações e impressões sobre o próprio problema que se enfrenta, poderiam também ser ditas *conhecimento*? E as crenças, concepções e pontos de vista sobre outros problemas não estritamente específicos e/ou técnicos ou não diretamente ligados à situação problemática com a qual se lida seriam também *conhecimento*?

Essa zona obscura na qual se misturam saberes, meta-saberes, conhecimentos, concepções, crenças, ideologias etc. coloca uma dificuldade concreta para a caracterização dos obstáculos de acordo com os critérios assinalados, na medida em que tanto na história quanto no contexto da sala de aula não apenas os conhecimentos matemáticos estritamente técnicos, mas sobretudo dificuldades de outra natureza acabam impedindo ou dificultando a construção do novo conhecimento.

A aplicação do segundo critério não ameniza a dificuldade de aplicação do primeiro. Ao contrário, apenas o dificulta. Isso porque, sempre que uma dificuldade ou obstáculo é identificado, na história ou no contexto da aula, na maioria das vezes torna-se difícil, senão impossível, detectar o contexto preciso no

---

[183] (Brousseau, 1983, p. 190-195).

qual o conhecimento-obstáculo que gerou a resistência se manifestou de forma exitosa e eficaz.

Finalmente, o terceiro critério parece ser de mais fácil aplicação, uma vez que as resistências se manifestam, pelo menos no contexto da aula, por meio dos erros cometidos pelos alunos ou então pela falta de empenho ou motivação para lidar com uma situação ou mesmo pela ausência de idéias, instrumentos ou planos para o enfrentamento da situação. Mas como identificar o conhecimento-obstáculo que estaria na base de tais dificuldades: seria um conhecimento técnico prévio inadaptado à nova situação? Seria uma crença, concepção ou meta-conhecimento etc.? Como ainda caracterizar um erro ou ausência de recursos ou motivação no plano histórico sem utilizar como parâmetro aquilo que a matemática se tornou no presente? A esse respeito, o próprio Brousseau[184] fez uma advertência importante e esclarecedora ao afirmar que

> a pesquisa dos indícios históricos correspondentes não se caracteriza mais, então, pela busca no passado de dificuldades ou erros "semelhantes" (?) a partir de nosso ponto de vista atual, mas sim *a partir dos danos ou revezes característicos de um certo saber quando mergulhamos nos conhecimentos atuais*, o que nos possibilita prever o gênero de problemas que serão mal colocados ou mal resolvidos a serem procurados na história: a epistemologia tende a se tornar sistemática e experimental.

Aqui percebe-se claramente a *saída* encontrada por Brousseau para evitar recorrer ao pressuposto indutivista retroativo na análise histórica como o fez Bachelard, e que ele tanto censurou em Glaeser. Não seria a análise epistemológica que deveria subordinar-se *à* ou iluminar-se *pela* análise histórica, mas sim a análise histórica ser iluminada e guiada pela epistemológica a partir de um *balanço prévio* dos danos e revezes de um certo saber nas condições de sua construção na atualidade.

Mas por que razões um tal balanço deveria estar restrito ao cômputo dos danos e não abarcar também os benefícios? E ainda que um tal balanço possa ser útil à investigação didática e ao exercício da prática pedagógica, por que razões deveríamos localizar tais danos na história? E que razões teríamos para acreditar que um balanço dos danos ao nível didático deveria encontrar traços semelhantes na história? E que razões adicionais teríamos para nos fiarmos na contra-proposta de Brousseau que nos pede primeiro para abandonar a busca de danos históricos

[184] (Brousseau, 1983, p. 191-192, grifos nossos).

semelhantes ao nível didático para em seguida nos propor a busca de danos didáticos semelhantes na história?

Vê-se, portanto, que o recurso Brousseauniano de inversão do sentido história-epistemologia para o de epistemologia-história a fim de livrar-se do pressuposto indutivista retroativo resulta apenas no atestado de superfluidade da própria análise histórica para a investigação didática.

A crença Brousseauniana na existência e na importância da identificação de obstáculos para a investigação didática levou-o mesmo a propor um método de pesquisa para essa identificação.

Esse método, exposto e defendido em 1988 por Brousseau em uma de suas exposições no Colóquio Internacional de Montreal, intitulada *Les obstacles épistémologiques et la didactique des Mathématiques* segue os seguintes passos: 1) encontrar erros sistemáticos e concepções em torno das quais esses erros se agrupam; 2) encontrar obstáculos na história da matemática; 3) confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos que se manifestam no ato da aprendizagem.

Em uma outra exposição, neste mesmo colóquio, intitulada *Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique*, Brousseau não apenas amplia a sua concepção original relativa às fontes de origem dos obstáculos, acrescentando àquelas originalmente propostas obstáculos epistmológicos de *origem cultural*, como também destaca a sua proposta de tratamento didático de obstáculos epistemológicos.

Essa proposta baseia-se na utilização de estratégias de geração e administração de *conflitos cognitivos*. A noção piagetiana de *conflito cognitivo* passa então a ser entendida como uma das formas de se lidar didaticamente com os obstáculos visando a sua superação. Tais estratégias variam desde a confrontação reiterada dos modelos implícitos utilizados pelos alunos, a exploração explícita dos obstáculos através de um confronto de posições, o debate entre as posições com intervenção do professor até a proposição de situações que provêm o equilíbrio entre o papel do professor e os dos alunos.

3.6. Comentários sobre a concepção de Michèle Artigue da relação entre história, epistemologia e didática da matemática

Michèle Artigue[185]

Michèle Artigue, professora/pesquisadora da Universidade de Paris 7, também deu a sua contribuição na polêmica relativa ao papel dos obstáculos epistemológicos na investigação em didática da matemática. Essa contribuição aparece de forma mais detalhada e profunda no artigo intitulado *Épistémologie et Didactique* publicado em 1990 na Revista *Recherches en Didactique des Mathématiques*[186].

Nesse artigo, Artigue parte da constatação de que a noção de obstáculo epistemológico, após os devidos refinamentos a ela imprimidos por Brousseau, aparece como indissociavelmente ligada ao contexto da produção de erros, uma vez que o conhecimento-obstáculo, para caracterizar-se enquanto tal, deve produzir respostas falsas[187]. No entanto, Artigue, ao aproveitar-se de uma conclusão sincera e surpreendente a que chega o próprio Brousseau em um estudo

---

[185] Educadora matemática francesa que desenvolveu a denominada teoria da engenharia didática, simultaneamente concebida como uma teoria para o ensino da matemática escolar quanto para a pesquisa em educação matemática. Acesso foto:(http://www.apmep.fr/Quelques-photos-du-colloque).
[186] (Artigue, 1990).
[187](Artigue, 1990, p. 259).

detalhado que realiza a respeito do uso exclusivo das frações unitárias entre os egípcios antigos, irá questionar alguns aspectos da lista de critérios colocados por ele para se caracterizar um obstáculo epistemológico.

A conclusão surpreendente e sincera - devido ao fato de contradizer em certos aspectos a lista de critérios caracterizadores de um obstáculo proposta pelo próprio Brousseau - a que chega Brousseau nesse estudo, é que do fato de os egípcios antigos terem persistido no uso de frações unitárias - o que tornaria esse conhecimento um forte candidato para incluir-se na categoria de conhecimento-obstáculo, uma vez que impediu, de certo modo, o desenvolvimento da noção de número racional - não se pode concluir que esse conhecimento seja um conhecimento falso. Ao contrário, "ele é uma adaptação legítima às condições precisas e que deixa seus traços na cultura"[188].

Essa conclusão nos mostra que, dentre as duas alternativas a que o estudo apontava - ou renunciar a encarar o uso de frações unitárias como um obstáculo epistemológico ou rever os próprios critérios de caracterização dos mesmos -, Brousseau acabou optando pela segunda, *explicando* essa escolha do seguinte modo: "Nós não sabemos ainda caracterizar os obstáculos em uma meta-linguagem específica como o fez Bachelard"[189].

Essa escolha implica, é claro, a possibilidade de se falar em obstáculos de origem didática sem que a eles estejam necessariamente associados obstáculos de origem histórica.

Essa conclusão a que chega Artigue fará com que ela coloque sob suspeição tanto a condição de um obstáculo epistemológico de origem didática ser necessariamente um agente produtor de erros como também a de necessitar ele de um atestado histórico de dificuldades análogas.

À primeira vista, poderíamos supor que essa suspeição legítima tivesse que, inevitavelmente levar Artigue à defesa de uma ruptura radical da investigação em didática da matemática com a história. Não é bem isso, porém, o que acontece.

Na tentativa de *salvar* a noção de obstáculo epistemológico e de manter o seu presumido papel de importância na investigação em didática, Artigue, com base em investigações sobre a aprendizagem da noção de limite realizadas por B.

[188] (Brousseau, apud Artigue, 1990, p. 260).
[189](Brousseau, apud Artigue, 1990, p. 260).

Cornu e, posteriormente, por A. Sierpinska, deverá *acentuar ainda mais* a importância da história para a investigação didática.

Artigue pensa poder superar essa aparente contradição por meio da defesa da tese de que aquilo que tanto a história quanto o ensino-aprendizagem deveriam atestar seria a presença, não de conhecimentos-obstáculos propriamente ditos, mas de *processos ou mecanismos mentais produtores de conhecimentos-obstáculos*. E que processos ou mecanismos seriam esses?

Artigue, em seu artigo, cita os seguintes: a generalização abusiva, a regularização formal abusiva, a fixação sobre uma contextualização ou uma modelização familiar e o amálgama de noções sobre um suporte dado[190].

Como exemplo de *generalização abusiva*, Artigue retoma e reinterpreta à luz de sua tese a conclusão a que havia chegado Brousseau de que o conjunto dos números naturais constitui um obstáculo epistemológico à aprendizagem do conjunto dos números decimais. Artigue irá reavaliar essa conclusão dizendo que aquilo que permite sustentá-la, por explicá-la de forma mais profunda, é que o conhecimento-obstáculo à aprendizagem dos decimais não é propriamente o conjunto dos números naturais, mas o mecanismo ou processo mental de generalização abusiva que seria o gerador não apenas desse mas de inúmeros outros obstáculos.

Mas o que nem Brousseau e nem Artigue parecem se dar conta é que é muito improvável que esse obstáculo de origem didática tenha um correspondente ao nível histórico.

Primeiro, porque os povos antigos não distinguiam entre espécies ou tipos de números. Nem egípcios, nem babilônios chegaram a estabelecer um tal tipo de distinção. Mesmo entre os gregos, jamais se cogitou em atribuir às quantidades incomensuráveis o estatuto de 'números', e se as frações não estavam presentes no terreno da aritmética, isto é, da teoria dos números, a razão dessa interdição nada tinha a ver com a presença de dificuldades ou obstáculos que teriam se imposto à realização de cálculos na passagem dos naturais às frações ou mesmo com supostas dificuldades decorrentes do emprego de processos de generalização abusiva, mas baseava-se na necessidade lógica consciente de se evitar a presença

[190] (Artigue, 1990, p. 261-262).

de contradições no terreno da aritmética após a crítica eleática à teoria pitagórica das mônadas[191].

As frações ou as quantidades não-inteiras integravam-se espontaneamente no trato com os problemas concretos que se colocavam naqueles contextos. Basta, por exemplo, bater os olhos sobre o papiro de Rhind para se convencer de que os problemas que envolviam divisões, e cujos resultados podiam ser expressos por uma soma de frações unitárias, jamais encontram-se separados daqueles cujos resultados são números naturais propriamente ditos. Ao contrário, as primeiras coisas que aparecem no papiro de Rhind são duas tabelas: uma que fornece os quocientes (expressos como somas de frações unitárias diferentes) das divisões de 2 por números ímpares de 1 a 101 e uma outra que fornece os quocientes das divisões de números de 1 a 9 por 10[192].

O mesmo ocorre com os tabletes babilônicos contendo tábuas de recíprocos que eram utilizadas para a realização de divisões de *a* por *b*, concebidas como a multiplicação de *a* pelo recíproco de *b*[193].

Poderíamos invocar ainda o 'ábaco de bolso' encontrado num sarcófago romano do século I[194], o qual possuía, além das colunas representativas das diferentes ordens decimais, outras reservadas às frações do *as* ou *onças* - uma unidade aritmética, monetária ou de massa -, para se atestar a transição natural e desimpedida que prevalecia, entre os povos da antiguidade, no cálculo entre quantidades inteiras e fracionárias.

Como exemplo de *regularização formal abusiva* Artigue destaca o processo ou mecanismo mental que está na base de erros tais como: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$; $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Destaca ainda aqueles erros que estão na base de obstáculos algébricos ligados à noção de limite, tais como os observados por Sierpinska, quais sejam: o de se transferir mecanicamente os métodos algébricos adequados para a manipulação de grandezas finitas para o terreno das grandezas infinitas e o de se transferir as propriedades dos termos de uma sequência convergente para o seu limite[195].

191(Szabó, 1960, p. 116).
192(Chace, p. 21-22).
193(Aaboe, 1984, p. 15-21).
194(Ifrah, 1989, p. 121).
195 (Artigue, 1990, p. 261); (Sierpinska, 1985, p. 39-40).

Vê-se, portanto, que esse mecanismo ou processo mental é semelhante ao anterior, uma vez que, ambos, advêm de ilusões provocadas pela crença indutivista de que aquilo que funciona bem para um caso ou para uma situação deverá também funcionar bem para outros casos ou situações. Porém, o processo de regularização formal abusiva é de natureza mais restrita que o anterior, uma vez que, nele, o campo de ação dessa crença parece restringir-se exclusivamente ao domínio das ilusões sintáticas ou simbólico-formais, isto é, das ilusões relativas ao modo peculiar de a linguagem algébrica operar no processo de expressão concisa de sentenças, regras, teoremas etc.

Excetuando-se, talvez, o exemplo clássico fornecido pela matemática do século XVIII, que fascinada pela intensa produção de novos resultados matemáticos, devidos ao emprego do simbolismo algébrico recém-constituído, abusou irrefletidamente do seu aspecto visual e analógico, extraindo ilegitimamente dele mais do que ele poderia oferecer, parece-nos, uma vez mais, que, também neste caso, seria difícil encontrarmos outros exemplos históricos para esse segundo processo mental citado por Artigue.

Além disso, mesmo os matemáticos do século XVIII, quando operavam mecanicamente com os símbolos e métodos algébricos, estavam conscientes dos riscos desse empreendimento. Não se tratava, porém, de aplicação cega e inconsequente desse processo mental. Era esse, aliás, o significado profundo da famosa e otimista advertência de d'Alembert: "Sigamos em frente e a fé virá depois". Essa advertência, quando colocada lado a lado com uma outra do próprio d'Alembert - "A álgebra é generosa; frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu" -, que tão bem expressava a sua forma de encarar o modo como se processava o desenvolvimento da matemática em seu tempo, atesta-nos que d'Alembert personificava o exemplo mais característico de um misto de prudência e ousadia.

De fato, como afirma Boyer[196],

> [d'Alembert] considerava discutível o uso que Euler fazia de séries divergentes apesar dos sucessos conseguidos. Além disso, d'Alembert fazia objeções a Euler por este assumir que diferenciais são símbolos para quantidades que são zero mas no entanto são qualitativamente diferentes.

---

[196] Boyer (1974, p. 28).

Desse modo, não se pode afirmar que, mesmo nesse período otimista de desenvolvimento da matemática, o fascínio pelo êxito tivesse tido o poder de se fazer imperar irrestrita e absolutamente o êxito do fascínio, a ponto de cegar o espírito dos matemáticos em relação ao problema do rigor de seus métodos e raciocínios.

Além disso, após essa época, e exatamente devido a ela, o processo mental de generalização abusiva e, particularmente, o de regularização formal abusiva, não deixaram de desempenhar um papel no desenvolvimento da própria matemática, mas papel este restrito, é claro, ao domínio da produção de conjecturas e jamais ao de raciocínios conclusivos.

Se assim é, parece-nos que esses processos desempenharam e continuam a desempenhar um papel de destaque na sala de aula. Penso tratarem-se muito mais de obstáculos de origem didática do que propriamente de origem epistemológica ou histórica.

Além do mais, penso ser completamente descabida qualquer afirmação que possa sugerir que a utilização desse processo mental aos níveis histórico e psicogenético ou no plano da construção escolar do conhecimento pudesse explicar-se pelas mesmas razões. Se os matemáticos o empregaram e ainda o empregam, as razões pelas quais o fizeram e o fazem são, na maioria das vezes, completamente distintas daquelas pelas quais o fazem os estudantes da atualidade. Antes de mais nada, os matemáticos do passado, fascinados pelo êxito, o fizeram tendo *consciência dos riscos* e/ou da *precariedade de seus métodos* ao nível do rigor e da fundamentação, e os da atualidade o fazem ainda hoje tendo a consciência desses mesmos riscos mas também da natureza promissora de um tal processo na produção de conjecturas *a serem provadas*. Isso não é, porém, o que ocorre, na maioria das vezes, no processo de construção escolar do saber matemático, no qual os estudantes empregam tais processos, *acreditando serem eles legítimos*, muito mais por força de ter que cumprir uma tarefa escolar que lhes é, muitas vezes, externa.

O terceiro processo ou mecanismo mental a que faz alusão Artigue é o da fixação sobre uma contextualização ou uma modelização familiar, ao qual atribui a característica de ser “o mais visível historicamente”.

Entretanto, Artigue não nos explica por que razões os outros processos seriam *menos historicamente visíveis*, talvez porque ao dedicar-se a essa tarefa correr-se-ia o risco de se concluir pela *invisibilidade* dos mesmos.

De qualquer maneira, o que Artigue parece estar querendo nos dizer por *fixação em um contexto ou modelo familiar* é que o nosso pensamento tenderia, quando constata o êxito da aplicação de um modelo a um certo contexto, a fixar-se teimosamente nele e elevá-lo à categoria de "o" modelo explicativo por natureza, recusando-se cegamente a perceber ou a admitir que as mesmas coisas, quando inseridas em outro contexto, tendem a ser explicadas de formas diferentes e a comportar-se segundo modelos adaptáveis a esse novo contexto.

De fato, os exemplos que ela nos fornece desse tipo de processo ou mecanismo mental são alguns dos já anteriormente constatados por Glaeser em sua epistemologia dos números negativos, quais sejam: a assimilação exclusiva da noção de quantidade à noção de grandeza e a fixação sobre o modelo aditivo das perdas e ganhos, ressaltando a "resistência ao progresso que essas fixações determinam"[197]. Mas como conceber um tal processo mental de fixação? Se o encarássemos como algo inerente à natureza humana, teríamos também, por decorrência, que explicar porque razão, apesar dele, o pensamento humano - tanto ao nível histórico quanto individual - experimenta também momentos de ultrapassagem, de superação, de construção de novidades e, portanto, momentos de *desfixação*. Além disso, se fosse esse o caso, poderíamos opor ao argumento da existência de uma *natureza humana* com propriedades fixas ou inatas um outro que afirma unicamente a existência de uma *condição humana* com características mutáveis e sócio-culturalmente explicáveis.

Em não sendo esta a forma como Artigue ou mesmo Glaeser concebem esse processo mental de fixação, eles deveriam explicar de onde proviria esse desejo de fixação do espírito humano nos modelos exitosos, por que razões *não naturais ou espontâneas* o espírito humano tenderia a operar segundo um desejo de fixação e não segundo um desejo de desfixação.

É claro que sempre poder-se-ia apelar para o argumento pragmático de que as experiências exitosas, ao contrário das fracassadas, impeliria naturalmente o espírito humano à fixação, à estagnação ou então à reiteração teimosa da experiência até convencer-se de que ela não faria mais sentido. Mas se a base da explicação é posta no êxito, como explicar que mesmo diante da percepção de o mesmo modelo não ter funcionado satisfatoriamente na segunda vez, ele pudesse ter sido mantido? Qual seria o tempo do espírito humano para aprender com o fracasso? Por que teria o espírito humano a inclinação ou a tendência de aprender somente com o êxito e não com o fracasso? Por que, ainda, as fixações deveriam sempre ser encaradas como *resistência ao progresso*? Não poderiam ser elas também opções conscientes e/ou opções explicáveis diante das circunstâncias?

Vê-se, diante disso, quão problemático torna-se o emprego de noções tais como as de *progresso*, *estagnação* e *decadência* no âmbito da explicação histórica. Isso porque, elas trazem implícito em si próprias um certo desejo de que as coisas, a cada tempo e em seu *tempo próprio*, devessem ter-se comportado do mesmo modo como elas acabaram se comportando no *nosso tempo*, isto é, após ter-se decorrido um intervalo temporal em seu processo histórico de transformação.

Seguindo uma outra linha de argumentação, o processo mental de fixação poderia ser encarado como o oposto do processo de generalização abusiva, uma vez que o primeiro é governado por uma espécie de medo ou receio prudente de se dar um *segundo passo*, ao passo que, o segundo, por uma espécie de aventureirismo epistemológico inconsequente que se permitiria dar *todos os passos.* Mas se assim é, como explicar que *processos afetivo-mentais* tão dissonantes e opostos pudessem ter co-existido pacificamente num mesmo contexto espaço-temporal e serem ambos referendados e legitimados no âmbito da esfera da produção institucional e inter-subjetiva do conhecimento matemático? Que razões teríamos para crer que ora um ora outro desses processos opostos possam ser legitimamente postos na base da explicação histórica da produção de obstáculos no processo de desenvolvimento de uma noção matemática específica?

O quarto processo ou mecanismo mental mencionado por Artigue é o *amálgama de noções sobre um suporte dado*. Com isso, Artigue parece estar querendo defender a existência de um processo mental obstaculizador que faria com que o sujeito se atentasse ou aderisse exclusivamente a um determinado aspecto ou *quadro* em que uma noção matemática pode se manifestar, ancorando nela, ou interpretando a partir dela, novas formas de manifestação dessa mesma

---

[197](Artigue, 1990, p. 261).

noção. Seria o caso, por exemplo, em que a atenção do sujeito (histórico ou individual) se volta exclusivamente para o aspecto relacional da noção de função, o que teria provocado, segundo Artigue[198], a lenta diferenciação histórica de certas propriedades relativas às funções e, segundo Sierpinska[199], o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, com Euler e Lagrange, em um domínio bastante restrito. Ou ainda o caso em que o sujeito se atém exclusivamente à uma concepção geométrica da diferença entre uma grandeza variável e uma grandeza constante que é o seu limite - como, por exemplo, conceber o círculo como o limite dos polígonos inscritos ou circunscritos a ele, ou ainda conceber a tangente como o limite da secante variável -, o que teria provocado, tanto na história quanto no contexto da construção escolar atual dessa noção, uma rejeição sistemática da expressão *aproximar-se de*, tida como ambígua e não-matemática, e, consequentemente, da rejeição da noção contemporânea de limite que estaria - contrariamente à concepção geométrica, que se *adere* à vizualização de uma posição particular ou excepcional de um *objeto* geométrico em movimento - intimamente ligada à operação topológica de *fechamento*[200].

Note-se que esse processo ou mecanismo mental engendrador de obstáculos é muito parecido com o anterior. Talvez, uma diferença que, entre ambos, possa ser levantada é que, se no caso anterior a fixação a um determinado modelo gerava estagnação, agora, a aderência a um aspecto ou *quadro* em que uma noção pode se manifestar geraria uma dificuldade ou uma quase impossibilidade de olhá-la sob outro ponto de vista. Mas se isso de fato fosse verdadeiro o desenvolvimento da matemática seria quase impossível ou, caso possível, se processaria uniformemente e muito lentamente, uma vez que todo pensamento inovador, original e produtivo no campo da história das idéias se faz contra pontos de vista estabelecidos e com uma certa aderência e estabilidade na comunidade matemática. Desse modo, penso que esse mecanismo ou processo mental é tão amplo e abrangente que, por poder ser potencialmente evocado para explicar tudo, acaba sendo pouco explicativo.

Retornando à tese em favor da qual Artigue tenta argumentar - qual seja, a de que aquilo que tanto a história quanto o ensino-aprendizagem da matemática

[198] (Artigue, 1990, p. 262).
[199] (Sierpinska, 1985, p. 50).

deveriam atestar seria a presença, não de conhecimentos-obstáculos no sentido de Brousseau, mas de *processos ou mecanismos mentais produtores de conhecimentos-obstáculos* -, penso que, de certo modo, ela se assemelha bastante àquela defendida por Piaget & García. Mas apresenta-se tão problemática quanto esta e também quanto a de Brousseau.

Em primeiro lugar, tal tese, por assemelhar-se à de Piaget & Garcia, isto é, por insistir em continuar a defender uma espécie de paralelismo ontofilogenético ao nível, não mais dos conhecimentos, mas dos processos mentais, fica também sujeita a todas as considerações críticas já feitas ao ponto de vista daqueles autores.

Em segundo lugar, ao deslocar, nesse paralelismo, a ênfase dos conhecimentos-obstáculos para os processos ou mecanismos mentais, fica sujeita ao mesmo tipo de questionamento que já endereçamos a Brousseau em relação à sua concepção de conhecimento. Não seriam também os processos ou mecanismos mentais produtores de conhecimentos-obstáculos, eles próprios, formas de conhecimento? Seria o conhecimento uma categoria histórico-epistemológica enquanto que os processso mentais seriam construtos de natureza estritamente psicológica? Em sendo este o caso, que lugar ocupariam os processos ou mecanismos mentais no plano da cognição? Mas se os processos mentais são construtos de natureza estritamente psicológica, qual seria o status dos processos a eles correspondentes ao nível da história? Seriam esses processos mentais obtidos como produtos de uma análise epistemológica, histórica, psicológica ou didática?

Penso que respostas a questões dessa natureza só podem ser inferidas quando questões como essas forem analisadas à luz da concepção que tem Artigue da relação entre história, epistemologia e didática. Que papéis específicos e diferenciados atribui ela às análises histórica, epistemológica e didática? Passemos a analisar brevemente esse problema.

Uma primeira aproximação à concepção que tem Artigue da epistemologia da matemática nos mostra que, para ela, trata-se do campo do saber que objetiva

[200] (Sierpinska, 1985, p. 52).

conhecer e revelar: 1) os processos pelos quais os conceitos matemáticos se formam e se desenvolvem; 2) as características da atividade matemática[201].

A meu ver, essa forma de conceber a epistemologia da matemática acaba assimilando ou subordinando esse campo do saber ao terreno da própria história das ideias matemáticas. Não constitui também tarefa do historiador da matemática estudar a formação e o desenvolvimento das idéias matemáticas e, ao fazê-lo, mostrar as características da atividade matemática em função da época e do local em que essa atividade se realiza? No entanto, essa concepção de Artigue talvez se esclareça melhor se pusermos lado a lado algumas das passagens de seu artigo nas quais ela se refere aos papéis que atribui à análise histórica e à análise epistemológica no plano da investigação em didática da matemática e também à análise didática propriamente dita:

- Cabe à análise epistemológica auxiliar o didata a manter à distância e sob controle as *representações epistemológicas* induzidas pelo ensino[202];
- A análise epistemológica permite ao didata tomar consciência das disparidades entre o *saber erudito* e o *saber ensinado*[203]:

> Enquanto a escola vive a ficção que consiste em ver nos objetos de ensino cópias simplificadas mas fiéis dos objetos da ciência, a análise epistemológica, ao nos permitir compreender *aquilo que governa a evolução do conhecimento científico*, ajuda-nos a tomar consciência da distância que separa as economias dos dois sistemas.

- A análise epistemológica também ajuda o didata

> a se libertar da ilusão de transparência dos objetos que ele manipula ao nível do saber, e também, a se libertar das *representações epistemológicas errôneas* que tendem a influenciar a sua prática de ensino[204].

- Tendo em vista que o propósito do ensino da matemática não é meramente transmitir conhecimentos matemáticos, mas sobretudo os de uma cultura, então, a análise epistemológica não se restringe à análise conceptual; deve ir mesmo além cabendo-lhe, diferentemente da análise histórica (mesmo que esta ressalte o aspecto necessariamente histórico e espacial desta

---

[201] (Artigue, 1991, p. 243).
[202] (Artigue, 1991, p. 243, grifos nossos).
[203] (Artigue, 1991, p. 244-245, itálicos nossos).
[204] (Artigue, 1991, p. 245, itálicos nossos).

cultura), inserir os alunos no *jogo da matemática*, isto é, nos processos gerais de pensamento que a governam[205].

- Deve-se estabelecer uma distinção entre *gêneses artificiais do conhecimento* e a *gênese histórica do conhecimento*. Isso porque, alguns fatores que condicionam as primeiras não são os mesmos que aqueles que condicionam a segunda. A tarefa do didata diz respeito à elaboração de gêneses artificiais do conhecimento, uma vez que ele se preocupa, antes de mais nada, com a construção do conhecimento matemático em um contexto atual constituído com essa finalidade. Já a gênese histórica constitui para o didata um

  > ponto de ancoragem da análise didática, uma espécie de promontório de observação - quando se trata de analisar um processo de ensino dado -, ou base de trabalho, quando se trata de elaborar uma tal gênese[206].

- Tanto a análise psicológica quanto a epistemológica, particularmente quando esta última se vê ancorada no desenvolvimento histórico do conceito, ao serem refinadas, permitem diferenciar uma ampla gama de concepções sobre um objeto dado. Porém, a classificação pertinente dessas concepções a fim de que elas se prestem à análise didática não é uma tarefa evidente, tendo em vista não apenas o fato da existência de uma disparidade entre o sistema *análise epistemológica e psicológica* e *análise didática*, como também o fato de

  > o aluno não poder ser reduzido ao status de sujeito epistêmico ou cognitivo, pois o que determina o seu comportamento é também, e sobretudo, seu status de sujeito didático[207].

O que Artigue parece estar querendo dizer com tudo isso é que: 1) pode-se e deve-se distinguir entre análise histórica, análise epistemológica e análise didática de uma determinada noção matemática; 2) a análise epistemólogica seria um tipo de empreendimento que deveria *ir além* da análise histórica. Esse *passo além* parece dizer respeito a uma espécie de capacidade ou potencialidade adicional da análise epistemológica de captar uma espécie de *lógica interna* pela

205(Artigue, 1991, p. 246).
206(Artigue, 1991, p. 246).
207 (Artigue, 1991, p. 274 e p. 278).

qual o desenvolvimento de uma noção matemática seria explicável ou à qual estaria ele subordinado; ou, nas palavras da própria autora, de se tentar captar "aquilo que governaria a evolução do conhecimento científico". Mas de onde viria esse *suposto* poder adicional da epistemologia em relação à história? Penso que essa suposição só se sustentaria quando se admite também o pressuposto anterior, que sempre esteve subjacente às investigações históricas de natureza positivista, de que uma tal *lógica realmente existe*. Mas se nas histórias positivistas cabia ao historiador propriamente dito dar esse *passo além*, em Artigue, como também em Brousseau, subtrai-se ao historiador essa tarefa transferindo-a ao epistemólogo. É unicamente essa divisão de tarefas que parece *justificar* a existência de um empreendimento epistemológico propriamente dito, distinto do empreendimento histórico. Entretanto, a artificialidade e a arbitrariedade dessa divisão e o pressuposto positivista que a sustenta tornam questionável e difusa a linha demarcatória entre história e epistemologia defendida por Artigue. O mesmo não ocorre, entretanto, com a linha de demarcação entre o empreendimento histórico-epistemológico e o didático; 3) o *sujeito didático* não pode ser reduzido ao epistêmico ou mesmo ao *sujeito cognitivo*.

Claro que não é difícil concordar com essa afirmação de Artigue. Mesmo porque, aquilo que a sua análise parece ressaltar é o fato de o *sujeito didático* não poder ser visto como o reflexo do *sujeito histórico-epistêmico* ou mesmo do *sujeito cognitivo*. E daí, a análise histórico-epistêmica é legitimamente concebida, como penso que deveria ser concebida, meramente como um *ponto de ancoragem da análise didática*.

Mas por que deveria o didata lançar âncoras no *mar* enganador das múltiplas versões histórico-epistemológicas das idéias matemáticas? Para Artigue, esse *mergulho* tem uma dupla função: uma função de controle e uma *função libertadora*. Isso porque, para ela, esse *mergulho* poderia, por um lado, auxiliar o didata a exercer um certo *controle* sobre as *representações epistemológicas* que tendem a influenciar a sua prática de ensino - ajudando-o a distinguir e a separar as representações epistemológicas errôneas das verdadeiras -, e, por outro lado, a se libertar da *ilusão de transparência* dos objetos que ele manipula ao nível do saber.

Neste momento, é útil pôr em evidência que, para Artigue, as 'representações epistemológicas' são concebidas como componentes das 'representações meta-cognitivas' do modo como estas últimas foram concebidas por A. e J. Robinet, dizendo respeito, mais especificamente, às "*concepções* que se forjam em um determinado indivíduo no domínio do conhecimento através da sua vivência matemática". Por sua vez, o termo *concepção* é concebido como um "*objeto local* ancorado na análise do saber"[208].

É importante ainda ressaltar que conceber a concepção como um *objeto local*, a torna algo distinto de um objeto unicamente ligado ao sujeito, como o queria Vergnaud. Desse modo, as concepções são concebidas por Artigue como construtos simultaneamente epistemológicos e cognitivos, mas que não podem ser apreendidas unicamente mediante uma incursão no mundo cognitivo dos sujeitos psicológicos, isto é, independentemente de uma análise histórico-epistemológica do conceito matemático ao qual se acham inalienavelmente vinculadas. Nesse sentido, torna-se legítimo falar-se em diferentes concepções de um mesmo conceito matemático, como o fez Robinet[209] a respeito do conceito de círculo:

> Essas definições (as dos sujeitos de sua pesquisa) são todas logicamente equivalentes e definem, portanto, o mesmo objeto matemático. Mas elas correspondem a formas diferentes de se perceber o círculo, de utilizar suas propriedades, pondo a ênfase sobre os elementos geométricos, sobre as relações entre esses elementos. É por essa razão que nos referimos a elas como concepções distintas do círculo.

É por essa razão que Artigue se permite adjetivar as representações epistemológicas como *errôneas* ou *verdadeiras* e é por essa razão também que lhe parece possível separá-las em falsas e verdadeiras, pois o critério demarcador dessa linha de separação reside, em última instância, no substrato referencial das concepções, isto é, no conceito matemático.

É, portanto, essa *concepção restrita de concepção* que legitima e sustenta tanto a *função de controle* quanto a *função libertadora* que ela atribui à análise histórico-epistemológica. De fato, aquilo que Artigue parece estar nos querendo dizer é que se o didata estiver suficientemente consciente das diferentes concepções do conceito matemático com o qual está lidando, ele estaria *liberto* das

[208] (Artigue, 1991, p. 279, grifos nossos).
[209] (Robinet apud Artigue, 1991, p. 268).

concepções errôneas que poderiam influenciar negativamente a sua prática pedagógica e/ou a sua prática de investigação em didática da matemática.

Desse modo, um dos papéis desempenhado pela história epistêmica na prática pedagógica e na prática da investigação em didática da matemática parece restringir-se a um *papel negativo*: a história teria o poder de ensinar-nos a não errar! Nesse sentido, e apenas nesse, a história é vista como um *porto seguro* no qual o didata pode lançar tranquilamente as suas âncoras. Mas esse suposto *porto seguro* só pode ser assim encarado se o *oceano* das histórias das ideias matemáticas *não for visto* como um mar enganador que comportaria múltiplas versões histórico-epistemológicas do desenvolvimento dessas ideias. Ele só é seguro, portanto, se acreditarmos que a nossa versão histórico-epistemológica é a única possível ou a mais correta dentre as possíveis.

Mas o que poderia sustentar uma tal crença? No caso de Artigue, parece-nos que essa crença otimista em relação ao papel não enganador da história advém menos da confiança na incontrovertibilidade da análise histórica propriamente dita, do que da confiança em um certo ponto de vista epistemológico acerca da natureza das asserções e dos objetos matemáticos que os concebe como entidades conclusivas, consensuais, incontrovertidas.

De fato, na situação hipotética de se considerar, não o caso de diferentes *concepções de círculo*, como o fazem Robinet e Artigue, mas de diferentes *concepções de democracia*, ou de diferentes *concepções de história* ou *concepções de matemática*, muito provavelmente essa confiança no poder da história de fornecer um critério fidedigno e infalível para se separar as representações epistemológicas falsas das verdadeiras não seria mais mantida.

Mas penso que seria injusto se não reconhecesse que, em Artigue, o papel da análise histórico-epistemológica em didática da matemática extrapola, *ainda que não muito*, as fronteiras da mera análise conceptual. Trata-se de atribuir a ela o *passo além* a que já fizemos referência anteriormente. Mas esse *passo além* não vai além das fronteiras da própria matemática, uma vez que o passo adicional àquele já dado pela análise epistemológica de natureza exclusivamente conceitual seria o de inserir os alunos no *jogo da matemática*, isto é, nos processos gerais de pensamento que a governam.

Desse modo, tal como em Brousseau, porém agora de forma explícita e cientemente tematizada, à análise histórico-epistemológica não se permite qualquer entrada que extrapole o âmbito da esfera cognitiva ou meta-cognitiva propriamente dita, sendo essa esfera vista como não tendo qualquer interação ou interseção com as esferas da ética social, dos valores sociais, da ideologia, da afetividade, dos sentimentos etc. Estas últimas seriam coisas complicadas demais para serem levadas em consideração por uma *engenharia didática*.

Após essa análise da concepção que tem Artigue da relação entre história, epistemologia e didática da matemática fica-se a pensar como seria possível *conciliar* a concepção que ela tem dessa relação com a sua tese do paralelismo ontofilogenético, não de conhecimentos-obstáculos no sentido de Brousseau, mas de *processos ou mecanismos mentais produtores de conhecimentos-obstáculos.* Isso porque, após ter descartado explícita e enfaticamente qualquer papel especular a ser desempenhado pela história no terreno da didática, ela, paradoxalmente, o recupera na tese que substitui os conhecimentos-obstáculos pelos processos mentais. De duas uma: ou aceitamos a existência dessa contradição tácita e não tematizada no pensamento de Artigue, ou tentamos superá-la através da defesa de uma conjectura que atribuiria a esses processos ou mecanismos mentais *o mesmo estatuto meta-cognitivo de que gozam as concepções do modo como ela as concebe.* Porém, quer sejam esses processos ou mecanismos mentais *concepções*, no sentido de Artigue, ou construtos de outra natureza que convivem com as concepções no interior da esfera das representações epistemológicas, o *papel* que desempenham no pensamento de Artigue independe do estatuto epistemológico a eles atribuído, uma vez que sobrevivem pelo fato de funcionarem como *elos de ligação* que asseguram a continuidade entre as falsas representações de nossos antepassados, geradoras de conhecimentos-obstáculos de natureza histórica, e as falsas representações dos estudantes da atualidade, geradoras de conhecimentos-obstáculos de origem didática. É essa forma de sobrevivência que lhe permite *salvar* a noção Bachelardiana de *obstáculo epistemológico* e a importância a ela dada por Brousseau no plano da investigação em didática da matemática. É claro que a postulação da existência desses elos de ligação acaba dando, mesmo que Artigue ateste o contrário, uma vida nova à metáfora desgastada do espelho como forma de se conceber a relação entre a história e a investigação em didática da matemática.

3.7. Comentários sobre a concepção de Anna Sierpinska da relação entre história, epistemologia e didática da matemática

Anna Sierpinska[210]

Anna Sierpinska, ex-professora do Instituto de Matemática da Academia de Ciências da Polônia e, atualmente, professora do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Concordia em Montreal (Canadá), também se envolveu na discussão acerca do status da noção Bachelardiana de 'obstáculo epistemológico' no plano da investigação em didática da matemática. Envolveu-se, diga-se de passagem, através do seu estudo acerca dos *obstáculos epistemológicos relativos à noção de limite*, com o propósito explícito de reafirmar a oportunidade e a importância dessa noção no terreno da investigação em didática da matemática.

De fato, logo no resumo do artigo de mesmo título desse trabalho, publicado em 1985, também na *Recherches en Didactique des Mathématiques*, ela afirma[211]:

---

[210] Acesso foto: (http://www.annasierpinska.rowebca.com/).

> A investigação a que se refere este artigo se situa dentro da linha de investigação indicada por Guy Brousseau (1983): descobrir os obstáculos epistemológicos ligados às matemáticas que se ensinam na escola e encontrar os meios didáticos para ajudar os alunos a superá-los [...] trata-se do caso particular da noção de limite e o artigo toca somente o primeiro dessses problemas: propõe-se uma lista de obstáculos epistemológicos relativos à noção de limite presentes todavia nos alunos de hoje em dia.

Embora esse estudo tenha sido realizado antes do aparecimento do artigo de Artigue a que fizemos anteriormente referência, e também antes da realização, em 1988, do Colóquio Internacional de Montreal organizado em torno dessa temática, Sierpinska mostra-se consciente da polêmica que vinha sendo travada em relação à noção Bachelardiana de *obstáculo epistemológico* e, por essa razão, logo na introdução do seu artigo procura expor ao leitor a sua própria concepção dessa noção[212]:

> De nossa parte, manteremos dois aspectos da noção Bachelardiana de obstáculo epistemológico: a aparição de obstáculos tem um caráter inevitável [...]; a repetição de sua aparição na filogênese e na ontogênese dos conceitos [...] na concepção que aqui vai ser utilizada, é a esses dois aspectos que faremos referência ao dizer que, para um conceito matemático determinado é possível pôr em evidência *causas de lentidões e perturbações na aquisição do conceito* as quais: 1) são específicas desse conceito e apenas dele; 2) são tais que sua tomada de consciência é indispensável para o desenvolvimento desse conceito. *É ao conjunto dessas causas que chamaremos obstáculo epistemológico* relativo ao conceito matemático em questão.

Quando se comparam as duas passagens acima, pode-se notar imediatamente que Sierpinska, embora afirme explicitamente que o estudo realizado se insere na linha de investigação proposta por Brousseau, explicita uma concepção de obstáculo epistemológico que se aproxima mais daquela defendida por Artigue do que a que indicou o próprio Brousseau.

De fato, ela parece não conceber os obstáculos como *conhecimentos* propriamente ditos, como o faz Brousseau, e sim como "causas de lentidões e perturbações" na aquisição de determinado conhecimento. No entanto, Sierpinska não explicita o que estaria entendendo por *causas*, e sendo essa palavra bastante genérica e vaga, poderia, é claro, não estar excluindo os *conhecimentos-obstáculos* assinalados por Brousseau.

Além disso, essas *causas* poderiam ser de naturezas diversas, extrapolando o domínio específico da matemática e mesmo da epistemologia da matemática e

---

[211] (Sierpinska, 1985, p. 5).
[212] (Sierpinska, 1985, p. 7-8, itálicos nossos).

penetrando em outros tais como os da psicologia, sociologia, política etc., o que afastaria a concepção de Sierpinska daquela que nos foi apresentada por Artigue.

Desse modo, se quisermos compreender mais a fundo a concepção que tem Sierpinska de *obstáculo epistemológico* teremos que fazer um breve comentário a respeito dos próprios obstáculos específicos relativos à noção de limite que a sua investigação revelou. Ela os classifica em 5 categorias, a saber: 1) obstáculos ligados com o *horror ao infinito*; 2) obstáculos ligados à noção de função; 3) obstáculos geométricos; 4) obstaculos lógicos; 5) obstáculos relativos ao símbolo[213].

A primeira dessas categorias inclui 7 tipos de obstáculos, isto é, de *causas* a lentidões ou perturbações.

Mas qual é a *lentidão* a que essas sete causas se referem? *A lentidão diz respeito à recusa em se atribuir à operação de passagem ao limite de uma sucessão* (isto é, à operação que determina o resultado da interdependência da infinidade de termos de uma sucessão) *o estatuto de operação matemática.*

E quais seriam os obstáculos ou causas dessa lentidão?

A primeira causa, isto é, o *primeiro obstáculo,* que explicaria essa lentidão seria o fato de a passagem ao limite ser vista como um método rigoroso de demonstração que elimina o problema do infinito[214].

Esse obstáculo, segundo Sierpinska, teria se manifestado tanto na história quanto entre os alunos que participaram como sujeitos de sua investigação.

No caso da história, o recurso ao método de exaustão seria o exemplo mais evidente, visto que, por um lado, o raciocínio subjacente a esse método tem sempre que ser repetido para cada nova grandeza concreta à qual ele seria aplicado e, por outro lado, embora não exista entre os historiadores da matemática, um concenso a esse respeito, esse método em ação eliminaria, segundo a autora, o problema do infinito. Isso porque, segundo Sierpinska, tendo em vista o fato bastante conhecido da aversão que tinham os matemáticos gregos pelo infinito - o que se consubstanciava na tese de Anáxagoras de que seria impossível que um processo infinito pudesse ter um fim -, seria contraditório afirmar que Eudoxo o aceitava. Dessa forma, seria mais plausível afirmar, como o fez Boyer, que os gregos não

[213] (Sierpinska, 1985, p. 37-38).
[214] (Sierpinska, 1985, p. 42).

consideravam que o processo subjacente a esse método fosse efetuado, literalmente, um número infinito de vezes, como o fazemos na operação de passagem ao limite.

Entre os alunos participantes da pesquisa essa 'eliminação' do infinito no cálculo do limite da função f (x) = (sen x)/x, para x = 0, também teria se manifestado, fato este que poderia ser inferido do modo como os alunos concebem a aproximação sucessiva de 1 conforme x vai tomando valores cada vez menores.
A segunda causa (segundo obstáculo) da recusa em se atribuir à operação de passagem ao limite o status de operação matemática diz respeito ao fato de a operação de passagem ao limite ter sido vista, tanto na história quanto pelos sujeitos da pesquisa, como um raciocínio baseado sobre uma indução incompleta. Segundo Sierpinska[215],

> se, no século XVIII, tantas descobertas foram feitas no domínio do cálculo diferencial e integral, foi justamente graças à liberação dos cânones do rigor grego, ao emprego livre da indução incompleta, do infinito e das grandezas infinitamente pequenas e grandes. O aperfeiçoamento dos métodos, o tratamento rigoroso dos conceitos, das operações e de suas bases teóricas passava por uma espécie de via experimental [...] assim, os raciocínios indutivos se transformaram, por um lado, em uma ciência geral - a heurística - e por outro lado, em métodos matemáti*cos corretos, como a indução matemática, a recursividade e a interpolação*.

A terceira causa dessa recusa, isto é, o terceiro obstáculo, diz respeito ao fato de a passagem ao limite ter sido vista, tanto na história quanto pelos sujeitos da investigação, como uma pesquisa daquilo que nós só podemos conhecer de forma aproximada[216].

A quarta causa dessa recusa[217], isto é, o quarto obstáculo, diz respeito ao fato de o resultado obtido por meio de uma passagem ao limite ter sido visto como algo que não necessitaria ser

> justificado por meio de demonstrações rigorosas, bastando, para isso, encontrar uma fórmula mágica que pudesse descrever a situação dada e que permitisse uma verificação a posteriori através de um cálculo simples.

A quinta causa dessa recusa, isto é, o quinto obstáculo, diz respeito ao fato de se ter visto legitimidade em se transferir as propriedades dos termos de uma sequência ao seu limite[218].

---

[215] (Sierpinska, 1985, p. 43).
[216](Sierpinska, 1985, p. 44).
[217] (Sierpinska, 1985, p. 45).
[218] (Sierpinska, 1985, p. 45).

A sexta causa, isto é, o sexto obstáculo, diz respeito ao fato de se ter visto legitimidade no procedimento de se transferir automaticamente os métodos da álgebra, apropriados para se manipular grandezas finitas, para se lidar com as grandezas infinitas[219].

A sétima causa, isto é, o sétimo obstáculo, diz respeito ao fato de se terem interpretado de forma excessivamente literal as expressões dinâmicas (tais como 'aproximar-se de'; 'tender para' etc) empregadas para se referir à noção de limite[220]. Na segunda categoria de causas ou obstáculos aventados por Sierpinska para se explicar a recusa em se atribuir à operação de passagem ao limite o status de operação matemática, estão aquelas ligadas à noção de função. São elas: 1) o fato de ter voltado exclusivamente a atenção para o aspecto relacional da noção de função, isto é, para a dependência funcional entre duas variáveis expressa pela fórmula $y = f(x)$, em vez de se tentar saber qual é o domínio e o contra-domínio da função, uma vez que quando se procura o limite de uma função em um ponto, não é necessário saber qual é o valor dessa função nesse ponto ou mesmo se esse ponto existe[221]; 2) o fato de a noção de limite ter sido, durante muito tempo na história, aplicado exclusivamente a funções monótonas[222]; 3) o fato de não se ter procedido à distinção entre a noção de limite e noção limitante inferior ou superior de um conjunto[223].

Na terceira categoria de causas ou obstáculos aventados por Sierpinska para se explicar a recusa em se atribuir à operação de passagem ao limite o status de operação matemática, estão aquelas ligadas à concepção geométrica da noção de limite. São elas: 1) o fato de se ter exclusivamente uma imagem geométrica da diferença entre uma grandeza variável e uma grandeza constante que constitui o seu limite[224]; 2) o fato de a concepção geométrica de limite, em certas situações, estar mais próxima daquilo que se poderia chamar 'limitante' de um conjunto e não à operação topológica de 'fechamento' que é a noção que está hoje em dia subjacente à idéia de limite[225].

---

[219] (Sierpinska, 1985, p. 47).
[220] (Sierpinska, 1985, p. 48).
[221](Sierpinska, 1985, p. 50).
[222](Sierpinska, 1985, p. 50).
[223] (Sierpinska, 1985, p. 51).
[224](Sierpinska, 1985, p. 51).
[225] (Sierpinska, 1985, p. 52).

Na quarta categoria de causas ou obstáculos aventados por Sierpinska para se explicar a recusa em se atribuir à operação de passagem ao limite o status de operação matemática, estão aquelas ligadas a noções lógicas. São elas: 1) o fato de não se atinar para a importância da presença dos quantificadores ao se definir limite, usando para isso apenas a linguagem natural e não a simbólica, o que implica a não distinção da dependência entre a vizinhança do ponto no qual se calcula o limite e a vizinhança do ponto que é o limite da função[226]; 2) o fato de não se atinar para a importância da ordem dos quantificadores ao se definir limite, o que implica na confusão entre noção de 'função' que faz corresponder aos elementos do eixo-x elementos do eixo-y, e a noção de 'limite em um ponto da função' que obrigaria considerar os eixos em sentido inverso ao assinalado[227].

Na quinta categoria de causas ou obstáculos aventados por Sierpinska para se explicar a recusa em se atribuir à operação de passagem ao limite o status de operação matemática, está aquela ligada ao símbolo da operação de passagem ao limite. Essa causa diz respeito ao fato do surgimento tardio desse símbolo, o que mostra que ele só se mostrou necessário após essa operação ter sido de fato reconhecida como uma verdadeira operação matemática[228].

Deixamos de considerar aqui as razões invocadas pela autora para justificar a presença desses obstáculos tanto ao nível da história quanto entre os seus sujeitos de pesquisa. Deixamos também de considerar o modo como foram escolhidos esses sujeitos, como foi conduzida a experiência, etc. por estarmos interessados aqui exclusivamente pela sua concepção de 'obstáculo epistemológico' e pela sua concepção da relação entre história, epistemologia e ensino-aprendizagem no âmbito da investigação em didática da matemática.

Voltando então a considerar a primeira dessas questões, podemos perceber que, através desse estudo específico, a autora intencionou levantar um conjunto de obstáculos, isto é, de *causas*, que estariam na base da explicação da lentidão, tanto no plano histórico quanto no do ensino-aprendizagem, em se atribuir à operação de passagem ao limite o status de operação matemática propriamente dita.

Mas antes de referirmo-nos ao problema da *natureza dessas cau*sas, vamos considerar a *natureza do problema* que elas buscam explicar.

---

[226](Sierpinska, 1985, p. 53-54).
[227] (Sierpinska, 1985, p. 54).

É claro que a intenção de se buscar explicações para o problema da 'lentidão histórica' do surgimento de uma idéia matemática ou de uma propriedade relativa a essa idéia já traz implícita em si mesma o pressuposto de que teria havido, de fato, uma tal lentidão. Mas em relação a que e com que propriedade se poderia pressupor isso? Qual deveria ter sido o 'tempo histórico normal ou razoável' para que se percebesse que uma tal noção gozaria de uma tal propriedade? E por que uma tal propriedade deveria necessariamente ter sido percebida em algum tempo? Percebe-se, por meio dessas questões, que a pressuposição de existência de **lentidão** no terreno da história das idéias só consegue se estabelecer quando se toma implicitamente como parâmetro aquilo que uma idéia matemática se tornou no nosso tempo; estamos, portanto, novamente, diante da presença dos mesmos pressupostos já utilizados amplamente por Bachelard: o de que o curso das idéias seria governado pela noção de progresso, ainda que não-linear, e o de projeção do presente no passado, isto é, de projeção no passado de nossa expectativa de que as idéias matemáticas se tornassem, *o mais rapidamente possível*, aquilo que elas acabaram se tornando.

Penso, portanto, que o termo *lentidão* não goza do status histórico necessário para configurar um problema de investigação histórica. Por outro lado, quem postula a existência de *lentidão* deverá também postular, por decorrência, a existência de *causas* ou *obstáculos* que a expliquem. Mas se se parte de um postulado histórico ilegítimo, o que pensar da condição corolária que ele impõe ao historiador? Penso, portanto, que Sierpinska não se coloca em vantagem em relação a Brousseau ou a Artigue ao tentar conceber os obstáculos epistemológicos como *causas explicativas das lentidões.*

Além do mais, quando nos atentamos para a natureza das causas por ela invocadas para explicar o reconhecimento histórico tardio de que a operação de passagem ao limite goza do status de verdadeira operação matemática, notamos que essas causas ou obstáculos ou se caracterizam por serem *conhecimentos que teriam impedido o reconhecimento de um outro conhecimento* - e, portanto, conhecimentos no sentido de Bachelard ou Brousseau -, ou então, se caracterizam por serem *uma ausência de percepção* de que os conceitos matemáticos funcionam ou deveriam ser vistos de tal ou qual maneira, isto é, por serem uma *ausência de*

---

[228] (Sierpinska, 1985, p. 54-55).

conhecimento, o que se choca com a concepção Bachelardiana e Brousseauniana de obstáculo epistemológico.

Percebe-se, portanto, a contradição subjacente à concepção de obstáculo epistemológico defendida por Sierpinska: essa noção aparece simultaneamente como um *conhecimento* (conhecer ou ver na operação de passagem ao limite um raciocínio baseado sobre uma indução incompleta; possuir exclusivamente uma imagem geométrica da diferença entre uma grandeza variável e uma grandeza constante que constitui o seu limite; possuir uma concepção geométrica de limite próxima daquilo que se poderia chamar *limitante* de um conjunto; conhecer ou enfatizar apenas o aspecto relacional da noção de função; conhecer a possibilidade, ainda que ilegítima, da transferência das propriedades dos termos de uma sequência ao seu limite etc.) e como uma *ausência de conhecimento* (incapacidade de se atinar para a importância da presença dos quantificadores ao se definir limite; incapacidade de se atinar para a importância da ordem dos quantificadores ao se definir limite; desconhecer a distinção entre a noção de limite e noção limitante inferior ou superior de um conjunto etc.).

O que se disse a respeito da concepção de obstáculo epistemológico no plano histórico pode, é claro, ser transferido para o plano da construção individual ou interativa dessa noção na atualidade, embora, nesse nível, Sierpinska não nos forneça um critério explícito que funcione como um parâmetro para a identificação de obstáculos. Nesse sentido, concordamos com a crítica que lhe faz Artigue[229]:

> Mas desses trabalhos [os de Sierpinska] retira-se a impressão de que aquilo que fundamenta de algum modo os obstáculos epistemológicos é a sua aparição e a resistência que eles oferecem na história dos conceitos considerados, bem como a observação de concepções análogas entre os alunos, mais do que o atestado da resistência que essas concepções oferecem entre os alunos da atualidade. Ora, essa condição me parece essencial: dada a disparidade de condições que governam os dois sistemas, a análise histórica pode ajudar o didata em sua pesquisa dos nós de resistência à aprendizagem, no entanto, ela não pode, em qualquer caso, fornecer por si só a prova de existência de tal ou tal obstáculo para os alunos da atualidade.

Em relação ao papel que atribui Sierpinska à história no âmbito da investigação em didática da matemática, a seguinte passagem do artigo que estamos analisando é bastante esclarecedora a esse respeito[230]:

---

[229] (Artigue, 1991, p. 254).

[230] (Sierpinska, 1985, p. 8-9, itálicos nossos).

> A segunda condição (isto é, a repetição da aparição do obstáculo na filogênese e na ontogênese dos conceitos) corresponde evidentemente ao primeiro aspecto acima (isto é, ao fato de serem as causas de lentidão de um conceito matemático específicas desse conceito e apenas dele). A primeira condição (isto é, a de que a aparição dos obstáculos epistemológicos é inevitável) corresponde ao segundo aspecto (isto é, ao de ser a tomada de consciência dos obstáculos indispensável para o desenvolvimento do conceito), visto que, se se encontra a manifestação de um comportamento determinado tanto na história quando entre os alunos da atualidade, isso nos atesta a existência de uma influência específica do desenvolvimento do conceito determinado e não apenas a influência das condições de ensino, como, por exemplo, a de seus meios e de seus métodos. É nesse sentido que, *no quadro de nossa pesquisa, a história desempenha o papel de uma ferramenta*. Todavia, o estudo histórico não se efetua paralelamente ao estudo experimental. Esses dois estudos estão em interação. De um lado, pode-se esperar que o conhecimento das condições históricas nas quais um obstáculo foi reconhecido e, em seguida, superado, nos ajudará a compreender as origens e a natureza de um obstáculo análogo que se manifestou entre os alunos; de outro lado, é possível que a descoberta e a análise dos obstáculos ou das dificuldades encontradas pelos alunos da atualidade permita lançar alguma luz sobre os pontos de vista adotados pelos matemáticos do passado.

Como se nota, a história é vista por Sierpinska como uma ferramenta, isto é, como um instrumento que possibilitaria o atingimento de certos fins. Que fins são esses? São obviamente fins metodológicos, isto é, relativos à metodologia da investigação em didática da matemática, uma vez que ela se apresenta como um instrumento adequado e indispensável para se proceder à 'leitura', isto é, à identificação, análise e explicação dos obstáculos e dificuldades que se manifestam no processo de construção individual e/ou interativa do conhecimento matemático.

E por que a história pode e deve se prestar a um tal fim? Por que, de algum modo, a psicogênese de ideias matemáticas é vista como o *espelho* da história dessas mesmas ideias, ainda que esse *espelho* goze da estranha propriedade de refletir apenas *alguns raios* (quais?) e não todos.

Mas ao mesmo tempo em que a psicogênese aparece como 'espelho semi-opaco' da história, a história também se mostra como espelho da psicogênese, uma vez que esta última também se evidencia como um instrumento metodológico para a 'leitura' do processo histórico de desenvolvimento das ideias matemáticas, ainda que esse 'processo histórico' seja identificado meramente com a restituição dos "pontos de vista adotados pelos matemáticos do passado". Cabem-lhe, portanto, todas as considerações críticas que fizemos anteriormente ao modo como Piaget & García concebem e utilizam o chamado *método psicogenético*.

Mas não podemos, é claro, caracterizar o posicionamento de Sierpinska em relação às questões que estamos enfocando neste estudo através da consideração de um único trabalho publicado em 1985, mesmo porque sabemos que a sua produção, após essa publicação, tem sido considerável e as suas concepções têm passado por mudanças significativas.

De fato, em sua comunicação intitulada *Sur un programme de recherche lié à notion de obstacle épistémologique* feita no Colóquio Internacional de Montreal, ocorrido em outubro de 1988, Sierpinska tenta dar um passo além no sentido de melhor caracterizar a sua concepção de obstáculo epistemológico. Assim se expressa Artigue[231] a esse respeito:

> Apoiando-se nos trabalhos de Wilder, ela distingue três níveis na cultura matemática: os níveis formal, informal e técnico, os quais correspondem, respectivamente, ao nível das crenças e convicções, ao nível das regras e esquemas inconscientes de funcionamento e ao nível das teorias e dos resultados explicitamente atestados. Ela desenvolve também a tese de que *é unicamente nos dois primeiros níveis que se situam os obstáculos epistemológicos*, insistindo também sobre a natureza relativa destes últimos.

Essa *mudança de orientação* no ponto de vista de Sierpinska, expressa pelo que vamos chamar de *teoria trifásica acerca da cultura matemática*, e na qual ela vai ancorar a sua tese de que *os obstáculos epistemológicos devem ser encarados como um fenômeno cultural*, acha-se, porém, melhor e mais recentemente explicitada em seu livro *Understanding in Mathematics*, publicado em 1994.

Antes de mais nada, é preciso esclarecer que a 'sua' teoria trifásica acerca da cultura matemática não é totalmente original, mas inspira-se, como ela mesma ressalta, nos trabalhos antropológicos de E. T. Hall, particularmente no livro intitulado *The Silent Language*, publicado em 1981. Segue-se, então, uma caracterização sumária do modo como a própria Sierpinska se apropria da 'teoria da cultura' de Hall[232].

Numa primeira aproximação, a cultura é concebida por Hall como uma *forma de comunicação* ou como *um modo de comportamento aprendido e compartilhado*. Nessa teoria, é dada à prática pedagógica uma importância sem precedentes, uma vez que as *formas de ensino*, em vez de serem vistas como *determinadas* ou *condicionadas* por outras práticas ou instâncias sociais, acabam

---

[231] (Artigue, 1991, p. 264, itálicos nossos).
[232] (Sierpinska, 1994, p. 161-163).

sendo consideradas *determinantes* dos demais componentes da cultura, e a aprendizagem, por sua vez, é tida como uma atividade tão indispensável como dormir, alimentar-se ou matar a sede.

Tendo em vista esse modo de inserção da prática pedagógica no interior de uma cultura, Hall irá defender a tese da existência de três modos do homem experienciar o mundo, três modos de transmitir essa experiência às crianças e três tipos de consciência, isto é, três tipos de relações emocionais com as coisas: o formal, o informal e o técnico.

Em relação às formas de se experienciar o mundo, poder-se-ia dizer que quando se navega ao *nível formal*, estar-se-ia em contato com as tradições, com as convenções, com as opiniões inquestionadas, com os costumes sancionados e com os ritos que não requerem justificação. Ao *nível informal* estar-se-ia em contato com os esquemas inarticulados de comportamento e pensamento, isto é, com os conhecimentos que temos a respeito de como realizar certas ações no dia a dia, tais como esquiar, andar de bicicleta etc, para as quais se exige algum tipo de habilidade. Ao *nível técnico* estar-se-ia em contato com o conhecimento explicitamente formulado, isto é, com o conhecimento analítico, logicamente coerente e racionalmente justificado.

No que diz respeito aos três modos de transmissão dessas três formas de se experienciar o mundo, a tese de Hall nos esclarece que: a *transmissão do nível formal* seria feita através de advertências ou repreensões diretas, correções explícitas de erros sem quaisquer explicações ou justificações; a *transmissão do nível informal* é feita com base na participação direta e espontânea de cada um na cultura a que pertence, através da imitação de práticas já estabelecidas, e não através do cumprimento de instruções, regras ou formas de comportamento impostos; a *transmissão do nível técnico* é feita com base no processo intencional, sistemático, coerente e planejado de ensino o qual, da mesma forma como ocorre na transmissão do nível formal, age por meio da correção de erros mas, diferentemente deste, procura explicar e justificar a razão desses erros.

A explicitação dessa tese permite a Hall re-enunciar a sua definição de cultura, a qual passa a ser vista como formada por modelos de comportamento *formal* que constituem o núcleo - sustentado por um conjunto de propriedades *técnicas* - em torno do qual ocorrem certas adaptações *informais*.

É necessário ainda esclarecer que esses três níveis caracterizadores de uma cultura possuem, para Hall, um caráter dinâmico. Isso significa: 1) que os elementos pertencentes a cada um desses níveis não são fixos, imutáveis e determinados de uma vez por todas, isto é, eles variam de uma cultura para outra e também dentro de uma mesma cultura; 2) que elementos pertencentes ao nível formal podem ser 'puxados' ou transferidos para o informal; 3) que novos elementos de um certo nível podem contradizer um ou mais elementos dos outros dois níveis podendo ser, a um primeiro momento, publicamente rejeitado e, num momento seguinte, transformado em elemento de um outro nível.

Isto posto, voltemos à caracterização da *teoria trifásica* acerca da cultura matemática proposta por Sierpinska. A tese subjacente a essa teoria em favor da qual Sierpinska argumenta é basicamente a mesma que aquela sustentada por Hall em sua teoria da cultura.

De fato, assim se expressa a autora[233]:

> Também na cultura matemática podem ser distinguidos três níveis de experienciar idéias matemáticas, três modos de transmissão dessas experiências aos outros e três tipos de consciência, isto é, de relações emocionais: o formal, o informal e o técnico.

Em seguida, caracteriza do seguinte modo esses níveis[234]:

> O nível técnico da cultura matemática é o *nível do conhecimento explícito* e racionalmente justificado [...], é o nível das teorias, do conhecimento que é verbalizado e justificado de um modo que se caracteriza por ser completamente aceito pela comunidade de matemáticos. O nível formal pode ser considerado *o nível das crenças, das convicções e das atitudes em relação à matemática*, das idéias acerca da sua natureza e do modo como se relaciona com a realidade, etc.; a crença na absoluta infalibilidade das teorias matemáticas, a convicção de que a matemática é rigorosa, ou, por outro lado, a convicção de que as provas matemáticas são confiáveis pelo fato de estarem baseadas em artifícios convencionais, e que, portanto, a matemática é completamente inútil do ponto de vista do conhecimento acerca do mundo e da realidade, são exemplos de elementos que compõem o nível formal. Um outro elemento pertencente a este nível é aquele usualmente chamado de *folclore matemático*, isto é, *aquilo que é conhecido, aquilo que é tão óbvio que ninguém se preocupa em provar*. Em particular, o que Wilder chamou de *intuição cultural* pertence a este nível. O nível informal da cultura matemática é o *nível do conhecimento tácito*, das formas não ditas de abordar e resolver problemas. Este é também o nível dos cânones de rigor e convenções implícitas sobre, por exemplo, como apresentar e justificar um resultado matemático [...] O conhecimento e a compreensão *informais* constituem um indispensável suporte do pensamento criativo em matemática. Por outro lado, este mesmo conhecimento e formas de compreensão - enquanto não completamente conscientes, inquestionados e obtidos a partir de experiências em situações concretas -, podem encaminhar nosso pensamento, em novas situações, de modo a tornar impossível a sua resolução. Reiterando tentativas, podemos inconscientemente aplicar sempre o mesmo esquema de pensamento ou

[233] (Sierpinska, 1994, p. 163).
[234] (Sierpinska, 1994, p. 163-165, itálicos nossos).

> ação, desconsiderando o fato de que aquilo que sempre mostrou funcionar bem pode, de repente, falhar completamente. É somente a tomada de consciência daquilo que se manifestou como um *obstáculo* que nos permite superar o impasse e mudar nossas formas de compreensão.

Do mesmo modo que Hall, Sierpinska também enfatiza o caráter dinâmico e interativo desses níveis que compõem a sua teoria trifásica acerca da cultura matemática, esclarecendo que não apenas os níveis formal e informal afetam o nível técnico, como também o contrário, uma vez que este último acaba criando muito rapidamente seu próprio sistema formal. Fornece, em seguida, dois exemplos do caráter dialético dessa interação entre os níveis.

No primeiro, mostra-nos como a crença otimistista de Hilbert de estabelecer, através de provas finitistas, a consistência da matemática, após ter estimulado, durante décadas, a *atividade técnica* de vários matemáticos e lógicos, acabou, com as provas de Gödel, dando origem a uma crença oposta de que o mito da infalibilidade absoluta da matemática estava seriamente ameaçado[235].

No segundo exemplo, Sierpinska nos mostra como a definição euclidiana de *razão* como uma relação quantitativa entre duas quantidades homogêneas (algo que está sujeito à *escolha*, adquirindo, portanto, o caráter de um *axioma*), acabou gerando a manutenção, por muito tempo, do dogma inquestionável de que seria impossível falar sobre a razão de duas quantidades não-homogêneas, tais como a razão entre espaço e tempo para se expressar a velocidade de um móvel[236].

É visível que essa teoria trifásica de Hall-Sierpinska nada mais faz do que repetir idéias que já vinham sendo defendidas pelo menos desde Frege.

O esquema a ela subjacente é o seguinte: separemos, em primeiro lugar, o 'mundo' do conhecimento em dois sub-mundos, o submundo do conhecimento objetivo (nível técnico) e o sub-mundo do conhecimento subjetivo (níveis formal e informal); em seguida, separemos o sub-mundo do conhecimento subjetivo em dois outros, o das nossas representações subjetivas acerca do sub-mundo objetivo (nível formal) e o das regras tácitas e inconscientes que orientam tanto a comunidade científica no processo de legitimação do conhecimento quanto nossos esquemas ou processos mentais subjetivos que são inconscientemente acionados no ato de enfrentamento de um problema matemático.

---

[235] (Sierpinska, 1994, p. 166-167).
[236] (Sierpinska, 1994, p. 168).

Percebe-se ainda uma certa semelhança dessa teoria trifásica com a teoria dos 3 mundos proposta por Popper para dar conta do problema de demarcação do conhecimento científico do não-científico, com uma diferença significativa: a ausência nesta teoria trifásica de Hall-Sierpinska do mundo 1 de Popper, isto é, do mundo físico propriamente dito.

Dessa forma, o mundo do conhecimento matemático aparece como um universo estritamente conceitual de saberes e meta-saberes sem qualquer tipo de ancoragem no mundo físico propriamente dito.

Os obstáculos voltam a ser concebidos como *conhecimentos* propriamente ditos. Mas para que isso seja possível, por um lado, crenças, concepções, convicções e atitudes acabam sendo incluídos na mesma categoria a que pertencem os *conhecimentos ditos óbvios*, isto é, acima de quaisquer suspeitas, e por outro lado, "aqueles expedientes" que permanecem ao nível do não-dito, do não completamente consciente (isto é, mecanismos e processos mentais individuais, normas, regras e critérios institucionais implícitos de validação do conhecimento) passam também a ser vistos como *conhecimentos tácitos*.

Mas se o critério aparente que distingue os conhecimentos óbvios dos tácitos baseia-se no grau de consciência individual ou pública das crenças, normas e mecanismos mentais, a distinção entre conhecimentos óbvios e tácitos acaba se tornando difusa, uma vez que não vejo por que razões crenças, concepções, convicções e atitudes devam, necessariamente, gozar da propriedade de *serem totalmente conscientes* ou de *serem óbvias*, e por que razões processos mentais individuais, normas e critérios institucionais, pelo fato de serem implícitos ou tácitos, não possam gozar também da propriedade de *serem completamente conscientes*. Não vejo ainda, por que razões os conhecimentos explícitos e publicamente legitimados (pertencentes ao nível técnico) não possam também ser considerados óbvios e completamente conscientes, o que torna difusa a fronteira que separa os conhecimentos ditos *técnicos* dos ditos *formais*.

Adicionalmente, segundo Sierpinska, é apenas nos níveis formal e informal que os obstáculos epistemológicos podem se manifestar. Portanto, ao negar a possibilidade de manifestação dos obstáculos epistemológicos ao *nível técnico* da cultura matemática, Sierpinska acaba excluindo a possibilidade de se buscar obstáculos exatamente naquela categoria de conhecimentos que para Brousseau e, em certo sentido também para Bachelard, constituía a *fonte natural* de obstáculos propriamente dita. Mas não levanta qualquer argumento convincente para justificar esse impedimento dos conhecimentos técnicos poderem funcionar também como obstáculos.

Penso ainda, que tanto na *teoria da cultura* de Hall quanto na correlata *teoria da cultura matemática* de Sierpinska, o termo *cultura* é concebido meramente como o espaço de ação e interação de um conjunto de indivíduos espacialmente e temporalmente configurados. É a intersubjetividade que define a cultura, mas nenhum papel é conferido às estruturas sociais propriamente ditas, pois o *social* é assimilado ao *intersubjetivo* e tal como em Lakatos, o conhecimento se desenvolve e se transforma *exclusivamente* mediante a crítica pública. Nenhum papel significativo desempenham nesse processo as formas de organização política, econômica e social e as estruturas sociais a elas correspondentes; os grupos e as classes sociais, com suas ideologias e interesses acham-se também excluídos desse processo.

Nesse sentido, os obstáculos epistemológicos - motores do progresso do conhecimento - ou são gerados por construtos subjetivos ou por construtos *objetivos* internos a uma comunidade científica restrita, fechada em si mesma e que não sofre influências de *fatores culturais* que extrapolem os seus próprios limites de ação e atuação.

Radford tem, portanto, razão quando afirma que o *programa revisado dos obstáculos epistemológicos* apresentado por Sierpinska "reduz a cultura ao *social behaviorismo*", o que o torna muito parecido com o *Strong Program* de Bloor[237].

Dessa forma, o compromisso com o social behaviorismo, o artificialismo e a ambiguidade subjacentes à teoria trifásica de Hall-Sierpinska impedem que a encaremos como um recurso razoável, consistente e convincente de *salvamento* da *teoria filosófica dos obstáculos epistemológicos*.

Vamos voltar agora nossa atenção para o papel que atribui Sierpinska à história e à epistemologia no âmbito da investigação em didática da matemática, isto é, ao modo como concebe a relação entre a história, a epistemologia e a investigação no âmbito da educação matemática nesta segunda fase de seu pensamento.

Em seu livro de 1994, essa questão é retomada dentro do *tema mais geral* relativo às *diferentes abordagens da compreensão* (isto é, da aprendizagem significativa) em matemática no âmbito da pesquisa em educação matemática. Segundo Sierpinska haveria pelo menos quatro tipos de *teorias* ou *modelos* que se prestariam a esse fim: 1) aqueles que, como o de Van Hiele ou o de Bergeron & Herscovics, se centram sobre a hierarquia dos níveis de compreensão; 2) aqueles que, tais como os apresentados por Greeno, Lesh, Dubinsky & Lewin, etc., se centram sobre as idéias de *modelo mental*, *modelo conceptual*, *estrutura cognitiva* etc.; 3) aqueles que, tais como os de apresentados por Skemp, Douady e Sfard, se centram sobre a idéia de jogo dialético entre dois modos de se atingir o objeto da compreensão; 4) aqueles que se centram na abordagem histórico-empírica da compreensão matemática, e nos quais se inclui a própria Sierpinska[238].

Para o fim que temos em vista, é suficiente focalizarmos apenas esta última abordagem. Segundo Sierpinska, as abordagens ou teorias que se incluem nesta última categoria embora estejam bastante próximas àquela desenvolvida por Piaget & Garcia na obra *Psicogênese e história da ciência*, diferenciam-se entre si segundo o modo como concebem a relação entre epistemologia e educação. Sierpinska tenta caracterizar essa relação através das diferenças que acredita existir entre esses dois empreendimentos.

Uma primeira diferença, segundo ela, residiria nos *objetivos distintos* que orientam as análises epistemológica e educacional. Caberia à primeira identificar e esclarecer os *mecanismos de desenvolvimento*, estágios, tendências, leis (tal como as leis da equilibração das estruturas cognitivas e do funcionamento da abstração reflexiva e refletida) etc., ao passo que, a segunda, por partir do pressuposto de que aprender nada mais é do que superar uma dificuldade, visaria à detecção de *acelerações e regressões*, de *lacunas ou interrupções epistemológicas*, bem como de *obstáculos epistemológicos* e de dificuldades. Com isso, Sierpinska parece estar querendo ressaltar que enquanto o foco da análise epistemológica seria a identificação e o funcionamento dos *mecanismos de desenvolvimento com vistas ao atingimento do equilíbrio cognitivo*, a preocupação da análise educacional incidiria, antes de mais nada e sobretudo, na identificação de formas de

---

[237] (Radford, 1997, p. 30).
[238] (Sierpinska, 1994, p.119-120).

funcionamento dos mecanismos que atuam na desestabilização das estruturas cognitivas do estudante, condição necessária e anterior a fim de que qualquer processo de equilibração ocorrerá. Isso porque, para ela[239],

> a construção de significados parece ser determinada, não pelos estágios - pelo menos não somente pelos estágios positivos de um movimento em direção à mudança, mas também pelo impacto negativo de várias normas, crenças e modos de pensar que constituem obstáculos a essa mudança.

Entretanto, Sierpinska não nos apresenta um argumento sequer que nos induza a acreditar por que razões a análise epistemológica deveria restringir-se exclusivamente à *tarefa positiva e moderadora* de identificar e esclarecer o funcionamento dos *mecanismos equilibradores* deixando ao investigador em educação a *tarefa negativa e agitadora* de identificar e esclarecer o funcionamento dos *mecanismos desestabilizadores*.

Penso que essa divisão de tarefas é completamente artificial e arbitrária, uma vez que o epistemólogo que está convencido de que o processo de construção do conhecimento possa ser descrito e esclarecido em termos de níveis hierárquicos qualitativamente distintos, progresso e equilíbrio, inevitavelmente compartilha do pressuposto tácito ou explícito que afirma a existência de mecanismos desestabilizadores. Por que, então, não dedicar a eles também a sua atenção?

Por outro lado, o educador matemático e também o investigador dessa área de conhecimento que compartilhe esta mesma visão do processo de construção do conhecimento matemático jamais poderia restringir-se ao papel de mero desestabilizador das estruturas cognitivas do estudante, uma vez que, após isso, a ele se coloca também a tarefa crucial de saber como - e através de que mecanismos equilibradores - dar continuidade ao processo que conduz ao equilíbrio. Por que então, não dedicar a eles também a sua atenção?

Uma segunda diferença entre as análises epistemológica e educacional apontada por Sierpinska diz respeito ao suposto *caráter genérico da primeira* em detrimento de um suposto *caráter específico da segunda*[240]:

> Para a educação matemática, teorias gerais do desenvolvimento são apenas um meio para elaborar e planejar o desenvolvimento de conceitos e processos matemáticos particulares. Para a epistemologia, esta hierarquia se inverte: teorias gerais são a

[239] (Sierpinska, 1994, p. 121).
[240] (Sierpinska, 1994, p. 122).

> verdadeira meta da pesquisa epistemológica e o estudo de processos particulares não é senão um meio para se atingir essa meta.

Mas se levarmos a sério essa distinção, deveríamos, inevitavelmente, nos perguntar em quais *teorias gerais do desenvolvimento* os diferentes investigadores em educação matemática se baseiam quando *falam sobre e/ou fazem* 'epistemologia da matemática'. Deveríamos nos perguntar qual é a teoria geral do desenvolvimento que informa a 'epistemologia dos números inteiros' de Glaeser, qual é a teoria geral do desenvolvimento que informa a "epistemologia dos números decimais" de Brousseau; qual é a teoria geral do desenvolvimento que informa a investigação a respeito dos "obstáculos epistemológicos relativos à noção de limite" dos vários investigadores da escola francesa e da própria Sierpinska?

Poder-se-ia responder a essa questão dizendo que a *epistemologia geral* de Bachelard estaria informando esses vários estudos. Porém, por que encarar a epistemologia de Bachelard como uma *epistemologia geral*? Em primeiro lugar, esse *geral* deve sofrer uma delimitação, porque a teoria de Bachelard dizia respeito tão somente ao conhecimento dito científico. Em segundo lugar, essa epistemologia do conhecimento científico precisou, para constituir-se e legitimar-se, recorrer às diferentes *esferas particulares* do conhecimento científico em busca de *exemplos específicos* que a pudessem validar (aliás, não é dessa forma que se constrói o pensamento de Bachelard em seu *A formação do espírito científico*?). Bachelard não precisou esperar o surgimento de um conjunto de epistemologias particulares elaboradas por epistemólogos específicos para, somente após isso, através de um processo de generalização, inferir uma suposta *teoria geral*.

Assim sendo, a suposta *teoria geral* de Bachelard nos aparece tão específica quanto aquelas levadas a cabo pelos investigadores no terreno da educação matemática. Mas, ainda que esteja subjacente ao empreendimento de Bachelard, como também ao de Piaget & García, um certo *desejo de generalização* (parcial no primeiro e ilimitado no segundo), e ainda que se possa *renunciar a esse desejo* quando se trabalha com *epistemologias específicas* como aquelas a cuja construção se dedicam alguns investigadores em educação matemática, a avaliação da legitimidade dessa distinção nos remete à discussão mais ampla relativa ao real status do pensamento dito epistemológico em relação ao pensamento histórico, questão esta que deverá ser objeto de nossa análise na seção seguinte. Adiantamos, porém, que essa distinção, como ressalta Sierpinska, embora esteja ligada às intenções orientadoras de cada tipo de análise, não se dá em termos do par tensional *geral versus particular*.

Desta forma, penso que, mesmo nesta segunda fase do pensamento de Sierpinska, não fica satisfatoriamente caracterizado o papel que cumpriria a análise epistemológica no plano da prática pedagógica e/ou da investigação em educação matemática.

Mas é preciso entender ainda como é que, para Sierpinska, a história da matemática intervém neste processo, isto é, de que modo a análise histórica se distinguiria da própria análise epistemológica e por que deveria o investigador em educação matemática, que se situa dentro do chamado *referencial histórico-empírico da compreensão matemática*, a ela recorrer.

A seguinte passagem[241] do seu livro que estamos considerando é bastante esclarecedora a esse respeito:

> A hipótese fundamental que está subjacente à abordagem histórico-empírica *não é a da existência de um paralelismo em termos de conteúdos* entre os desenvolvimento histórico e genético da compreensão científica. Aquilo que se considera responsável pelas semelhanças que encontramos entre os modos como nossos estudantes compreendem e o modo como nossos antepassados compreenderam na história, *não é o suposto fato de que a 'filogênese recapitula a ontogênese'* mas, por um lado, um certo *compartilhamento de mecanismos* desses desenvolvimentos, e, por outro, a *preservação, na tradição linguística e no uso metafórico de palavras, dos sentidos a elas atribuídos no passado*. De acordo com Piaget & Garcia, um desses mecanismos do desenvolvimento do conhecimento é a *sequência* em sua construção. Sequência significa que 'cada estágio é imediatamente o resultado de possibilidades abertas pelo estágio precedente e uma condição necessária para o seguinte [...] o segundo mecanismo é aquele que conduz do nível intra-objetal [análise objetal] para o inter-objetal [análise de relações ou transformações], e deste para o trans-objetal [construção de estruturas], os quais são comuns tanto para o desenvolvimento do indivíduo quanto para o desenvolvimento histórico. Um outro tipo de afinidade entre o modo de compreensão dos estudantes e aqueles encontrados na história da ciência e da matemática diz respeito à bifurcação de modos pelos quais as palavras que desempenharam o papel de categorias fundamentais do pensamento mudam seu significado. Um ramo dessa bifurcação pode ser chamado 'racionalização', que é o que ocorre quando uma palavra ou expressão se torna um termo científico, incluído em uma teoria. O outro ramo pode ser chamado 'metaforização': a palavra adquire um significado metafórico ou de valor de um símbolo e se incorpora ao vernáculo [...] racionalização e metaforização são processos que seguem direções diferentes. Enquanto a racionalização rompe com as tradições linguísticas e as ontologias que elas carregam, a metaforização as preserva de forma não-literal, mas ainda carrega algumas das velhas emoções e valores.

241 (Sierpinska, 1994, p. 122-123, itálicos nossos).

Não podemos deixar, antes de mais nada, de destacar uma espécie de *contradição* presente no modo como Sierpinska tenta caracterizar a hipótese fundamental subjacente à abordagem histórico-empírica da compreensão (ou aprendizagem significativa) da matemática. De fato, ao mesmo tempo em que, ao tentar *caracterizá-la negativamente*, insiste em registrar que *não* se trata de uma hipótese recapitulacionista ou que *não* se pretende defender um paralelismo ao nível dos conteúdos matemáticos propriamente ditos, ao *caracterizá-la positivamente*, acaba ressaltando a *preservação* de certas características tanto na filogênese quanto na ontogênese, quais sejam, de certos mecanismos inerentes à construção do conhecimento (a sequência dos estágios e mecanismos de passagem de um a outro dos níveis intra, inter e trans) e dos sentidos racionais e metafóricos dos termos científicos.

Ao afirmar essa hipótese, Sierpinska nos coloca diante da seguinte situação: 1) há *algo* que se *preserva* em ambos os processos; 2) esse *algo* não são coisas banais, mas coisas muito relevantes como mecanismos de produção do conhecimento e significados das palavras. É claro que o recapitulacionismo não se caracteriza simplesmente pela defesa do ponto de vista de que algo se preserva nos dois processos. Precisaríamos saber as *razões que sustentariam tal preservação*, uma vez que não se trata de duvidar de que os estudantes da atualidade continuam empregando muitos dos mecanismos mentais empregados por nossos antepassados e de que continuam atribuindo a certas palavras muitos dos significados a elas atribuídos por eles. Mas como explica Sierpinska essa preservação? Recorrendo ao mesmo tipo de explicação de *natureza biológica* utilizada por Piaget & García na obra a que já nos referimos exaustivamente.

Essa *preservação* nem mesmo recebe qualquer tipo de explicação com base em sua 'teoria cultural trifásica de cunho social-behaviorista' da cultura matemática, utilizada exclusivamente para defender a natureza cultural dos obstáculos epistemológicos. Em nenhum momento se alega que tal *preservação* poderia ter-se dado através de *mecanismos propriamente socioculturais* como os de transmissão ou apropriação cultural, de preservação da memória ou difusão da cultura etc.

Dessa maneira, a hipótese que levanta Sierpinska para justificar uma abordagem histórico-empírica da educação matemática ao nível da investigação fica sujeita às mesmas críticas que já fizemos às pesquisas em educação matemática que tomam por base o referencial de Piaget & García.

Mas poderíamos nos perguntar ainda por que o pesquisador em educação matemática, filiado ao *referencial histórico-empírico* precisaria, necessariamente, basear-se numa hipótese desta natureza para realizar suas investigações? De acordo com Sierpinska, só podemos saber se de fato está ocorrendo uma aprendizagem significativa (isto é, uma aprendizagem com compreensão) de um tópico qualquer da matemática se tivermos como referência um "modo ideal de compreensão do objeto em questão"[242].

Mas como poderemos julgar se uma forma de aprendizagem é, de fato, mais significativa do que outra qualquer? Onde buscar esse 'modo ideal de compreensão'? É aqui que a história intervém. Diz ela[243]:

> se sabemos quais foram as maiores rupturas na história (ou pré-história) de uma teoria; quais questões impulsionaram repentinamente novos desenvolvimentos; quais foram as formas de compreensão causadoras de estagnação, então, seremos capazes de identificar as formas de aprendizagem realmente relevantes. Mas nessa avaliação, o estágio de desenvolvimento no qual se encontra a criança ou o estudante é um fator importante. Embora *as formas iniciais de compreensão* estejam implicadas nas formas adultas, elas *não são transparentes*, e a história da matemática é a *história da matemática adulta*. Portanto, as análises históricas devem ser feitas em interação com os estudos empíricos acerca do modo como os conceitos matemáticos se desenvolvem na criança. Então, *uma aprendizagem pode ser julgada significativa se ela acusa a passagem para um nível diferente de pensamento*, por exemplo, do intra para o inter ou do pensamento sob a forma de complexos para o pensamento conceptual, se desejamos trabalhar com o referencial da psicologia Vygotskiana. Em geral, propomos julgar como mais importantes do que quaisquer outras, *aquelas formas de aprendizagem que consistem em superar obstáculos*, epistemológicos ou desenvolvimentais, relacionados com o conhecimento científico maduro.

Nessa colocação, a história se manifesta como fonte de busca das formas ideais de aprendizagem matemática. É por essa razão que o pesquisador deveria a ela recorrer. Mas tendo em vista o fato de ser a história da matemática *uma história da matemática adulta*, isto é, de uma *matemática feita por adultos*, essas formas ideais de aprendizagem matemática devem ser confrontadas com estudos empíricos de desenvolvimentos conceptuais de *crianças da atualidade*.

Vê-se, portanto, que a necessidade do confronto não advém do fato das intenções, motivações sociais e condições políticas, econômicas e sociais diferenciadas subjacentes ao contexto histórico de produção do saber matemático

[242] (Sierpinska, 1994, p. 124).
[243] (Sierpinska, 1994, p. 124, itálicos nossos).

e ao contexto da aprendizagem escolar contemporânea desse saber, mas tão somente da *diferença etária* existente entre o *matemático adulto* de qualquer época e contexto e o *aprendiz neófito da matemática* de qualquer época e contexto. Portanto, para que o aprendiz neófito da matemática da atualidade atinja o patamar no qual se encontra a matemática adulta da atualidade, basta percorrer, gradativamente, os diferentes níveis hierárquicos de pensamento pelos quais passaram os matemáticos adultos de qualquer época e contexto. É desta forma, e somente desta, que o aprendiz da atualidade realizaria uma aprendizagem de fato significativa, atingindo a compreensão matemática. Mas para Sierpinska[244], esse percurso etapista em direção à matemática adulta só pode ser realizado mediante a superação de obstáculos:

> Por que pensamos que a compreensão ideal deve ser atingida através da superação de obstáculos? Por que o processo de compreensão deve ter uma tal natureza dramática? As razões repousam em nossas hipóteses acerca do desenvolvimento intelectual de um indivíduo e do desenvolvimento histórico do conhecimento. A primeira hipótese é que na passagem de um nível a outro de conhecimento e compreensão, há uma necessidade simultânea de integração e reorganização. A cognição não é um processo acumulativo. Pressupõe-se isso tanto para a psicogênese quanto para a história do conhecimento científico [...]. Outras hipóteses acerca da filosofia dos obstáculos epistemológicos estão relacionadas com as ilusões positivistas da possibilidade de se construir o conhecimento científico unicamente sobre a base da observação e da lógica, de um modo completamente livre de considerações metafísicas [...]. Nossas crenças sobre a natureza do conhecimento científico, nossas visões de mundo, as imagens que mantemos e que estão impressas na linguagem que usamos, nossos esquemas de pensamento - tudo isso constitui o ponto de partida para o modo como lidamos com problemas científicos e influenciam nossas abordagens e soluções. Eles constituem as propriedades necessárias bem como os obstáculos para a 'compreensão ideal'.

Mas os obstáculos epistemológicos não são mais concebidos, como anteriormente, como obstáculos à compreensão *correta*, e sim como obstáculos a alguma mudança na estrutura da mente.

Dessa forma, a importância da história para o pesquisador em educação matemática se evidencia não mais pelo fato de haver uma preservação dos mesmos obstáculos epistemológicos tanto na filogênese quanto na ontogênese, mas pelo fato de haver *uma preservação da forma de se produzir o conhecimento matemático, via superação de obstáculos*, nessas duas instâncias. A psicogênese do conhecimento matemático e a aprendizagem escolar da matemática não mais espelham os obstáculos epistemológicos em si mesmos, mas a forma de se

[244](Sierpinska, 1994, p. 125-126).

produzir o conhecimento matemático através da superação de obstáculos. A ênfase passa dos obstáculos em si mesmos para a forma de se processar uma aprendizagem que só será compreensiva se se processar via luta para a superação de obstáculos, luta esta que só a história nos pode ensinar.

Tentando fazer uma avaliação final de todas essas tentativas de 'salvamento' da noção Bachelardiana de obstáculo epistemológico no terreno da investigação em educação matemática, parece-nos difícil discordar do fato de que os alunos, em seus processos de aprendizagem escolar da matemática, enfrentam dificuldades e obstáculos dos mais diversos tipos, os quais acabam impedindo a construção compreensiva do novo conhecimento.

Difícil parece também discordar do fato de que nossos antepassados, no enfrentamento de problemas determinados no processo de construção de novos conhecimentos no terreno da matemática também enfrentaram dificuldades e obstáculos de diferentes tipos.

Entretanto, quando falamos na existência de dificuldades e obstáculos no plano contemporâneo do ensino-aprendizagem da matemática, estamos com isso querendo dizer que as dificuldades e obstáculos enfrentados pelos estudantes são sempre *relativos,* tendo em vista que eles só podem ser caracterizados como dificuldades e obstáculos porque o são *à luz de um sistema de referências constituído pelo saber já elaborado* que se está querendo transmitir, reconstruir ou problematizar.

O mesmo não ocorre, entretanto, em relação às dificuldades e obstáculos enfrentados por nossos antepassados. Por quê? Simplesmente porque eles não tinham um sistema de referência acabado à luz do qual pudessem julgar a validade das suas propostas de soluções aos problemas enfrentados. Portanto, não podiam ter consciência desses obstáculos (ou, pelos menos, dos mesmos obstáculos aos quais se costuma hoje fazer referência). Nesse sentido, *esses* obstáculos *inexistiam para eles.* Apenas quando saídas e propostas de *solução adequadas*, isto é, aceitas como adequadas por uma comunidade científica, são alcançadas é que se pode rever as propostas antecedentes e *enxergar* nelas desvios e malentendidos em relação à solução adequada negociada, e também, *obstáculos* que seus proponentes não teriam sabido superar adequadamente.

Quando se faz história temática da matemática ou história das idéias matemáticas com base na noção de obstáculo tal como a concebeu Bachelard, está-se, implícita ou explicitamente assumindo, como já assinalamos, um *pressuposto indutivista regressivo* que pode ser assim expresso: as propostas de solução a determinados problemas, aceitas como bem sucedidas e adequadas numa certa época, podem ser legitimamente utilizadas como referência para apontar as 'deficiências' do passado, as *deficiências* dos nossos antepassados, as *deficiências* das propostas dos nossos antepassados.

4. O papel da história da matemática na investigação em Educação Matemática em algumas pesquisas desenvolvidas à luz da perspectiva da *Teoria da Complementaridade*

4. 1. Considerações acerca da Teoria da Complementaridade

Mais recentemente, a história da matemática tem-se também revelado um importante instrumento para subsidiar reflexões, análises e investigações no terreno da educação matemática entre alguns adeptos de uma tendência que vou denominar aqui de *teoria da complementaridade.*

Um dos primeiros educadores matemáticos que introduziu e defendeu o ponto de vista da complementaridade em Educação Matemática foi o professor e pesquisador alemão Hans-Georg Steiner, do Instituto de Didática da Matemática de Bielefeld - Alemanha, num artigo ocasional intitulado *Forschungs - und Orientierengsprobleme der Mathematikdidaktik* de 1984.

Hans-Georg Steiner (1928-2004)[245]

Gert Schubring em 2004[246]

[245] Esta e outras fotos, bem como informações acerca da vida e obra de Hans-Georg Steiner podem ser acessadas no breve artigo escrito por Gert Schubring, postado no website *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008) - History of ICMI* (http://www.icmihistory.unito.it/portrait/steiner.php).

[246] Acesso foto: (https://www.uni-bielefeld.de/idm/info/mitarbeiter/gschubring.htm).

Outro educador matemático alemão que também foi pioneiro no desenvolvimento desse ponto de vista foi Michael Otte, também do Instituto de Didática da Matemática de Bielefeld.

Michael Otte[247]

Para o desenvolvimento de seus pontos de vista acerca do ensino e da aprendizagem da matemática no quadro de teorias da complementaridade, tanto Steiner quanto Otte inspiraram-se, sem dúvida, no desenvolvimento da Física contemporânea, conforme eles próprios esclarecem:

> [...][248] A maioria das chamadas "*falsas dicotomias*" que Peter Hilton tratou na sua conferência plenária no congresso de Karlsruhe (1977), tais como "técnica e compreensão", "desenvolvimento de estruturas e resolução de problemas", "axiomática versus construtivismo", "matemática pura versus matemática aplicada", representam *pares de posições aparentemente opostas* que podem ser seguidas ao longo da história da Matemática e da Educação Matemática. Na teoria e prática educacional, tentou-se muitas vezes esclarecer estes paradoxos de um *modo reducionista*: ou se atribui *domínio absoluto* e importância principal a um dos dois polos, ou se adota uma posição dita multi-polar que diz, precisamente, "faça ambos", sem realmente compreender e operacionalizar as relações antagônicas subjacentes que estão de fato relacionadas de forma fundamental com o problema epistemológico da *relação entre conhecimento e atividade* visto como o *cerne de todas as complementaridades.*

> Todas[249] as tentativas, feitas até agora, para revelarem vários aspectos de uma abordagem compreensiva da Educação Matemática, poderiam dar a impressão de que existem uma *coerência* e uma *homogeneidade* estruturais subjacentes, como base essencial para a integração e síntese pretendidas. Contudo, há *fenômenos epistemológicos fundamentais* que nos mostram que o que acontece é o contrário. Tal como em Física, a teoria da relatividade e o estruturalismo foram seguidos pela teoria

[247] Acesso foto: (https://www.researchgate.net/profile/Michael_Otte4).
[248] (Steiner, 1993, p. 29, itálicos do autor).
[249](Otte, 1984, p. 45-46, itálicos nossos).

> quântica com a sua relação de indeterminação, e o famoso princípio da complementaridade de N. Bohr, tornou claro, num sentido muito amplo que "qualquer parte relevante do conhecimento teórico pertencendo a alguma idéia ou modelo do mundo real, terá que ter em conta, de uma maneira ou de outra, que o indivíduo que tem o conhecimento é parte do sistema representado pelo conhecimento. Todo o conhecimento pressupõe um sujeito, um objeto e relações entre estes (que são estabelecidas através da atividade do sujeito). Logo, todo conhecimento possui uma estrutura incoerente com conexões metafóricas e estritamente operativas.

Uma citação de Pattee[250], contida no artigo de Steiner, nos mostra que a noção de complementaridade foi um construto inicialmente apropriado pelo terreno da psicologia cognitiva:

> A idéia clássica de que podemos explicar o controle em sistemas cognitivos sem modos complementares de descrição conduz a uma auto-contradição ou, pelo menos, a um paradoxo conceptual. A complementaridade pode ser vista como um reconhecimento do paradoxo. Tem as suas raízes no dualismo indivíduo-objeto e no paradoxo básico entre determinismo e livre arbítrio...Uma idéia que proponho seria a de que os psicólogos façam o difícil esforço de assimilar o conceito básico de complementaridade como um princípio epistemológico. Não é, de forma alguma, um conceito claro e distinto, mas é rico e sugestivo. O princípio da complementaridade não promove resoluções das oposições binárias centrais da psicologia: mente e corpo, estrutura e processo, sujeito e objeto, determinismo e livre arbítrio, leis e controles, etc. Pelo contrário, [...] o princípio da complementaridade requer um uso simultâneo de modos descritivos que são formalmente incompatíveis. Em vez de resolver aparentes contradições, a estratégia é aceitá-las como um aspecto irredutível da realidade.

4.2. Um modo de apropriação da noção de complementaridade em Educação Matemática: o ponto de vista de Paul Cobb

Paul Cobb, professor pequisador da Vanderbilt University (Nashville - USA), em seu artigo intitulado *Cognitive, and Anthropological Perspectives in Mathematics Education*[251], também recorreu ao ponto de vista da teoria da complementaridade para defender tanto a possibilidade de convivência e conciliação de pontos de vista epistemológicos 'distintos' relativos à matemática, quanto de pontos de vista 'diferentes' acerca do processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Mais explicitamente, Cobb parte da existência e caracterização de três perspectivas distintas e mutuamente excludentes, isto é, de três formas de encarar a aprendizagem no domínio da matemática atualmente em destaque: a perspectiva experimental, a cognitivista e a antropológica. Com isso pretende mostrar que nenhuma delas, por si só, consegue explicar satisfatoriamente o modo como ocorre

---

[250] (Pattee, apud Steiner, 1993, p. 30).
[251](Cobb, 1989); (Cobb, 1996).

a aprendizagem da matemática ou o modo como deveria se processar o seu ensino. Para isso, Cobb acredita que seria necessário proceder a uma coordenação de análises das três perspectivas consideradas. Defende o ponto de vista de que, ainda que essas perspectivas sejam irredutíveis, elas não só poderiam como deveriam se **complementar** quando se tem em vista uma explicação satisfatória da aprendizagem em matemática e do ensino da matemática.

Paul Cobb[252]

Cobb diz que, embora esse seu ponto de vista possa parecer paradoxal, esse *aparente paradoxo* resulta, na verdade, do fato de se tentar ocultar uma *complementaridade* presente em todos os aspectos da educação matemática, toda vez que se tenta teorizar nesse domínio, isto é, toda vez que se tenta realizar uma teoria da educação matemática.

Para Cobb, a complementaridade que parece endêmica na educação matemática teórica expressa o aparente paradoxo entre a matemática enquanto uma construção subjetiva e pessoal e a matemática enquanto verdade objetiva e independente da mente. Afirma que as considerações a respeito da aprendizagem matemática dos estudantes mostram que ora se enfatiza um extremo e ora outro, o que parece sugerir que tenhamos que escolher uma das duas alternativas: ou estudantes individuais, cada qual construindo solitariamente suas realidades matemáticas isoladas, ou estudantes que aprendem misteriosamente o conhecimento matemático pré-construído no mundo.

Mas, para Cobb, devido à complementaridade implícita no ensino, não podemos resolver o problema de uma vez por todas. Porém, temos que aprender a enfrentá-lo em situações locais através da reflexão sobre "*as relações antagônicas subjacentes e as interações mútuas das duas posições*".

Segundo Cobb, a aprendizagem parece envolver um paradoxo, pois à medida em que fazemos progressos e achamos soluções para nossos problemas, simultaneamente construímos novos mecanismos assimilatórios que constituirão nossas próprias prisões conceptuais.

Do mesmo modo, o ensino, para ele, também parece conter um paradoxo, pois, como afirmou Lampert, o dilema de ensinar "*é um debate entre tendências que se opõem sendo que nenhuma delas sairá vencedora* ...". Na prática, continua Lampert, trata-se mais de trabalhar repetidamente com esta tensão em situações concretas do que resolver o dilema de uma vez por todas.

Do lado epistemológico, no que se refere particularmente ao modo de se conceber a verdade matemática, Cobb adota uma posição semelhante à anterior. Nesse caso, o paradoxo se expressa no fato de parecerem razoáveis e aceitáveis em situações distintas, as duas seguintes afirmações aparentemente contraditórias: a verdade matemática é uma descoberta ou a verdade matemática é uma invenção ou construção da mente humana.

Se por um lado, aceitamos sem questionar a existência de verdades matemáticas e acreditamos estar fazendo descobertas quando nos engajamos na atividade matemática (isto é, quando se pesquisa no domínio da própria matemática) - o que tornaria razoável o ponto de vista realista de que a verdade matemática e a realidade matemática são construções independentes da mente humana -, por outro lado, quando refletimos sobre a atividade de se fazer matemática, a verdade matemática e a realidade matemática parecem ser construções do sujeito, cuja existência não faria sentido ser afirmada independentemente do sujeito - o que tornaria razoável o ponto de vista intuicionista ou construtivista da verdade matemática.

---

[252] Acesso foto: (http://peabody.vanderbilt.edu/bio/paul-cobb).

Segundo Cobb, não somos obrigados a aceitar essa aparente contradição. Desde que façamos uma distinção entre a experiência ou atividade matemática e a reflexão filosófica sobre essa experiência ou atividade, as duas afirmações anteriores são vistas *não como opostas ou contraditórias, mas como complementares*. Afirma que a questão não é obrigar-se a escolher entre descoberta e invenção ou construção, ou argumentar que estamos enganados quando assumimos que a matemática é verdadeira. Em vez disso, trata-se de levar a sério a experiência matemática e explorar a atividade construtiva que acompanha nossa experiência de verdade e certeza matemática, pois a verdade matemática é um fenômeno a ser explicado mais do que negado.

Essa tentativa de 'conciliação' de perspectivas tentada por Cobb, é exemplificada pelas duas implicações para o terreno da educação matemática que ele retira da discussão acima realizada. A primeira é que, se os estudantes não agem como platônicos quando fazem matemática, nada resta a eles a não ser formalismos vazios. E não é a experiência platônica dos objetos matemáticos, mas o formalismo que é o inimigo de todos os que valorizam o significado em detrimento do rigor.

A segunda implicação é que, se realmente levarmos a sério o fato de encorajarmos os estudantes a serem construtores de significados matemáticos, devemos encarar o professor e os estudantes como constituindo uma comunidade intelectual. O ambiente da sala de aula deveria ser apropriado tanto quanto possível, de modo a permitir que os estudantes façam suas próprias negociações e institucionalizações, em resumo, que façam suas próprias construções das verdades.

Fizemos aqui alusão ao ponto de vista de Cobb unicamente a título de ilustrar um modo como a perspectiva complementarista pode atuar no terreno da Educação Matemática. Mas, no trabalho de Cobb, a participação da história da matemática na investigação em Educação Matemática não é, de nenhuma maneira, ressaltada.

4. 3. A concepção cíclico-dual de Régine Douady acerca da relação entre história e didática da matemática

Um outro ponto de vista que poderia filiar-se à perspectiva complementarista no terreno da investigação em educação matemática, e no qual a história da matemática parece exercer algum papel, foi aquele defendido pela investigadora francesa Régine Douady em sua tese de doutorado intitulada *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*[253], ainda que a própria Doaudy, em nenhum momento de seu trabalho faça alusão a tal perspectiva.

Régine Douady e Adrien Douady[254]

Neste trabalho, Douady, com base nas hipóteses piagetianas acerca da formação do conhecimento desenvolvidas por Piaget em sua Teoria da Equilibração, propõe-se a argumentar em favor das seguintes teses: 1) Sobre o plano estritamente cognitivo, a produção de desequilíbrios e a possibilidade de re-equilibrações visadas (as quais correspondem à aquisição de novos conceitos implicados na *dialética ferramenta-objeto*) podem ser realizadas, para grande parte dos conceitos matemáticos envolvidos e no seio de *jogos de quadros* apropriados, por meio de problemas construídos com essa finalidade; 2) No contexto do ensino e da aprendizagem da matemática em situação escolar, isto é, sobre o plano didático, há problemas adequados, que se inscrevem em uma

[253](Douady, 1984): *Jogo de quadros e dialética ferramenta-objeto no ensino de matemática*.

[254]Régine e seu marido Adrien, ambos matemáticos franceses. Acesso foto:

organização global de ensino eficaz para a maioria dos alunos, que permitem concretizar a hipótese anterior[255].

Além dessa base piagetiana, tendo em vista o fato de Piaget ter deixado intocado um dos problemas centrais da didática, qual seja, o da relação entre o ensino e a aprendizagem, Douady sente a necessidade de complementar o seu referencial teórico recorrendo à *teoria das situações didáticas* desenvolvida por Guy Brousseau desde o início dos anos 70 - e para a qual voltaremos brevemente a nossa atenção a seguir -, mas apropriando-se dela de uma forma particular[256].

Brousseau define *situação didática* do seguinte modo[257]:

> um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição.

Estas relações estabelecem-se através de uma negociação entre professor e alunos cujo resultado tem sido denominado *contrato didático*. Este contrato, com componentes explícitos e implícitos, define as regras de funcionamento dentro da situação: distribuição de responsabilidades, determinação de prazos temporais a diferentes atividades, permissão ou proibição do uso de determinados recursos de ação etc.

A presença de um contexto escolar não é essencial na definição de uma situação didática; o que realmente é essencial é seu caráter intencional, o fato de haver sido construída com o propósito explícito de que alguém aprenda algo.

O objetivo fundamental da didática da matemática para Brousseau é averiguar como funcionam as situações didáticas, quer dizer, quais das características de cada situação são determinantes para a evolução do comportamento dos alunos e, consequentemente, de seus conhecimentos. Isto não significa que só seja de interesse analisar as situações didáticas exitosas. Inclusive, se uma situação didática fracassa em seu propósito de ensinar alguma coisa, sua análise pode constituir uma contribuição à didática, se permitir identificar os aspectos da situação que se tornaram determinantes de seu fracasso.

(https://pt.wikipedia.org/wiki/Adrien_Douady).

[255](Douady, 1984, p. 1).

[256] (Douady, 1984, p. 7).

[257] (Brousseau, apud Artigue & Douady, 1993, p. 51).

Sendo as situações didáticas o objeto de estudo da didática da matemática, tornou-se necessário desenvolver uma metodologia para analisá-las. È frequente que os pesquisadores que chegam à experimentação educativa com uma formação prévia em psicologia, projetem situações didáticas, ponham-nas à prova em uma ou várias aulas e logo centrem seu interesse nos comportamentos manifestados pelos alunos, dentro da situação experimental.

Não tentam explicar estes comportamentos, ou sua evolução, em função das características particulares da situação na qual se produziram. Ignoram se, alterando algumas condições da situação, voltariam a aparecer os mesmos comportamentos. Para Brousseau, no entanto, um momento fundamental da investigação em didática se constitui na análise a priori da situação. O pesquisador em didática deve ser capaz de prever os efeitos da situação que elaborou, antes de colocá-la à prova em aula; só posteriormente poderá comparar suas previsões com os comportamentos observados.

Para analisar as situações didáticas, Brousseau as modeliza, utilizando elementos da teoria dos jogos e da teoria da informação. Para uma situação didática determinada identifica-se um estágio inicial e o conjunto dos diversos estágios possíveis, entre os quais se encontra o estágio final que corresponde à solução do problema envolvido na situação. Explicitam-se as regras que permitem passar de um estágio a outro. A situação é descrita, então, em termos das decisões que os jogadores (alunos) podem tomar a cada momento e das diferentes estratégias que podem adotar para chegar ao estágio final.

Outro aspecto que facilita a análise das situações didáticas é sua classificação. Brousseau distingue 4 tipos de situações cuja sequência nos processos didáticos que organiza é a seguinte: 1) *as situações de ação*, nas quais se gera uma interação entre os alunos e o meio físico. Os alunos devem tomar as decisões que faltam para organizar sua atividade de resolução do problema formulado. Nesse tipo de situação, "*o aluno é confrontado com um problema. Na procura de uma solução produz ações que podem levá-lo à criação de um saber-fazer. Pode explicitar ou validar, mais ou menos, as suas ações, mas a situação de ação não o exige*"[258]; 2) *as situações de formulação* têm por objetivo a comunicação de informações entre alunos. Para isto, devem modificar a linguagem que utilizam habitualmente, precisando-a e adequando-a às informações que devem comunicar. Diferentes condições tornam necessária essa troca de informações. "*Na situação de formulação, o aluno pode justificar as suas posições, mas a situação não o exige*"[259]; 3) *as situações de validação*, nas quais tenta-se convencer um ou vários interlocutores da validade das afirmações que são feitas. Neste caso, os alunos devem elaborar provas para demonstrá-las. Não basta a comprovação empírica de que o que dizem é certo; é preciso explicar porque, necessariamente, deve ser assim; 4) *as situações de institucionalização* são aquelas destinadas a estabelecer convenções sociais. Nestas situações busca-se que o conjunto de alunos de uma aula assuma o significado socialmente estabelecido de um saber que foi elaborado por eles mesmos, em situações de ação, de formulação e de validação.

Brousseau coloca que é preciso criar situações didáticas que façam funcionar o saber a partir de saberes definidos culturalmente nos programas escolares. Esta formulação apoia-se na tese de que o sujeito que aprende necessita construir por si mesmo seus conhecimentos por meio de um processo adaptativo semelhante ao que realizaram os produtores originais dos conhecimentos que se quer ensinar. Trata-se, então, de produzir uma gênese artificial dos conhecimentos, em que os alunos aprendam fazendo funcionar o saber, ou melhor, em que o saber apareça, para o aluno, como um meio de selecionar, antecipar, executar e controlar as estratégias que aplica à resolução do problema formulado pela situação didática. Em síntese, trata-se de colocar os alunos diante de uma situação que evolua de forma tal que o conhecimento que se quer que aprendam seja o único meio eficaz para controlar a situação. A situação proporciona a significação do conhecimento para o aluno, na medida em que o converte em instrumento de controle dos resultados de sua atividade. O aluno constrói assim um conhecimento contextualizado, em contraste com a sequenciação escolar habitual em que a busca das aplicações dos conhecimentos antecede a sua apresentação descontextualizada.

Um exemplo de situação didática projetada por Brousseau[260] é aquele em que apresenta-se aos estudantes o seguinte problema: 'Este é o desenho de um quebra-cabeça com algumas medidas de suas partes. É preciso fabricar um quebra-

---

[258](Artigue & douady, 1993, p. 52).
[259](Artigue & Douady, 1993, p. 52).

cabeça que seja igual a este, porém maior, de maneira tal que um lado que neste quebra-cabeça mede 3 cm, no outro meça 5cm'. Num primeiro momento, a estratégia utilizada pelas crianças para solucionar o problema consiste em adicionar 2 cm a cada um dos lados da figura. O fracasso desta estratégia constitui uma grande surpresa para as crianças. Voltam a insistir nela, procurando efetuar as medições com maior precisão. Por fim, se dão conta de que devem procurar outra estratégia, cujo desenvolvimento contribuirá para a construção do conceito de número racional (já que 3X 5/3 = 5).

É claro que o modo como Brousseau caracteriza uma 'situação didática' faz com que possamos afirmar que, para ele, toda 'situação didática' é, na verdade, uma 'situação-problema', embora a recíproca não seja verdadeira. Isso porque, para ele, uma das exigências fundamentais e distintivas de uma situação didática em relação a uma situação-problema é que, o curso da primeira, deve ser planejado de modo a possibilitar ao aluno a superação de determinado obstáculo segundo uma *dialética conveniente*. Isso significa que, na situação planejada, o novo conhecimento que permite a superação do obstáculo, deve aparecer ao aluno como a *estratégia ótima* (no sentido de a única exitosa dentre as possíveis) para o enfrentamento do problema.

Nesse sentido, as situações-problema que colocamos em nossas aulas seriam, na opinião de Brousseau, tanto mais interessantes, quanto mais permitissem a nossos alunos superar obstáculos, e quanto mais respeitassem as seguintes condições: 1) permitir ao aluno empregar seu saber antigo; 2) permitir que o aluno tome consciência deste saber, mas também abrir-lhe a possibilidade de verificar a insuficiência destes conhecimentos antigos; 3) permitir ao aluno construir novos procedimentos que respondam de modo coerente e adequado as solicitações da situação.

Assim, o objetivo fundamental de uma situação-problema é permitir ao aluno adquirir novos conhecimentos tomando, em primeiro lugar, consciência da insuficiência daqueles que já possui.

Brousseau[261] justifica do seguinte modo a sua concepção de ensino-aprendizagem da matemática com base na resolução de problemas:

---

[260](Gálvez, 1996, p. 34).
[261] (Brousseau, 1996).

> O saber matemático, em sua apresentação, tem sido descontextualizado, despersonalizado e destemporalizado e o trabalho do professor deveria ser, em certa medida, o inverso daquele realizado pelo cientista, redescontextualizando, redespersonalizando e redestemporalizando o saber, para que o aluno possa desenvolver uma verdadeira atividade científica e para que os conhecimentos matemáticos tenham sentido para ele; deverá imaginar e propor aos alunos situações que eles possam viver e nas quais os conhecimentos apareçam como solução ótima aos problemas propostos.

Quando Brousseau[262] compara o trabalho do professor com o do cientista, ou com o do matemático, tem em mente destacar o papel do professor no processo de ensino-aprendizagem. Interpretando a sua própria fala acima, afirma que:

> o matemático não comunica seus resultados tal como os obteve, mas os reorganiza, lhes dá a forma mais geral possível; realiza uma 'didática prática' que consiste em dar ao saber uma forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada, fora de um contexto temporal. O professor realiza primeiro o trabalho inverso ao do cientista, uma recontextualização do saber: procura situações que dêem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados. Porém, se a fase de personalização funcionou bem, quando o aluno respondeu às situações propostas não sabia que o que 'produziu' é um conhecimento que poderá utilizar em outras ocasiões. Para transformar suas respostas e seus conhecimentos em saber deverá, com a ajuda do professor, re-despersonalizar o saber que produziu, para poder reconhecer no que fez algo que tenha caráter universal, um conhecimento cultural reutilizável. Podem ser vistas aqui duas partes, bastante contraditórias, do papel do professor: fazer viver o conhecimento, fazê-lo ser produzido por parte dos alunos como resposta razoável a uma situação familiar e, ainda, transformar essa 'resposta razoável' em um 'fato cognitivo extraordinário', identificado, reconhecido a partir do exterior.

Desse modo, o problema, neste marco teórico, desempenha não só a função de fixação da aprendizagem de um conhecimento, papel este outorgado ao problema pela pedagogia clássica (o problema como aplicação a posteriori de uma teoria, conceito ou proposição). O problema adquire um papel que ultrapassa também aquele a ele atribuído pela pedagogia ativista, isto é, o de instrumento de motivação da aprendizagem, para adquirir também o papel adicional de meio de elaboração do saber.

Já, para Douady[263], as condições que deverão contemplar as situações-problema para que façam aparecer no aluno comportamentos específicos que dêem testemunho da aquisição de um determinado conhecimento são as seguintes:

---

[262] (Brousseuau, 1996, p. 48 - 49).
[263] (Douady, 1984, p. 15-17).

- O aluno deve se comprometer com a resolução do problema. Deve também prever alguma resposta possível para o mesmo. Isso porque se o aluno não tentar utilizar os conhecimentos que já possui, então, não poderá perceber que eles são insuficientes para resolver uma determinada situação-problema;

- A situação-problema proposta deve ser elaborada de tal maneira que os conhecimentos já disponíveis pelo aluno sejam insuficientes para resolvê-la imediatamente. Caso contrário, não haveria aquisição de novo conhecimento, haveria apenas uma aplicação dos conhecimentos já elaborados.

- A situação-problema deve permitir ao aluno decidir se uma solução encontrada é ou não conveniente. Essa característica é essencial, uma vez que o aluno, ao utilizar seus conhecimentos, deverá perceber, isto é, conscientizar-se de sua insuficiência para a resolução da situação proposta. Essa insuficiência pode resultar do fato de que a resposta encontrada é falsa ou de que o método utilizado é inadequado, etc.

- O conhecimento que se deseja que o aluno adquira deve ser o instrumento melhor adaptado para que o aluno resolva o problema. Em outras palavras, a resolução do problema deve passar obrigatoriamente pela utilização como ferramenta do conceito matemático a ser apropriado pelo aluno, o que significa que os conceitos devem ser introduzidos pela sua *funcionalidade*. Essa condição não é sempre fácil de ser obtida. Para isso, o professor deve realizar uma análise 'a priori' do problema, tentando responder a pergunta: 'que tipos de estratégias o aluno poderá, eventualmente, utilizar para solucionar o problema?' Os dados do problema e o material que se põe à sua disposição são variáveis que podem influenciar a escolha das estratégias por parte do aluno. Essas variáveis são chamadas *variáveis didáticas*.

- A situação-problema deve fazer intervir o saber ensinado em diferentes 'quadros' ou 'contextos'. Segundo Douady, "um quadro é constituído pelos objetos de um ramo da matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa em um momento dado a esses objetos e a suas relações". Exemplos de quadros podem ser: o quadro real físico, o gráfico, o numérico, o algébrico, o geométrico, o informático, etc. Como se pode conhecer os possíveis quadros associados a um conceito? É um estudo histórico-epistemológico do conceito que pode nos ajudar a precisar os diferentes quadros nos quais o conceito se desenvolveu, os problemas e as motivações que estiveram na base da passagem de um quadro a outro, etc. Uma análise histórico-epistemológica do conceito de tangente, por exemplo, nos permite ver como a tangente foi, antes de mais nada, um objeto geométrico desenvolvido no quadro geométrico. Mas quando Lagrange fornece em seu "*Teoria das Funções Analíticas*" a caracterização algébrica de tangente em termos de derivada, a tangente passa a ser estudada no quadro algébrico. Para o conceito de função, por exemplo, observamos como historicamente ele se desenvolve no quadro numérico - e as tábuas babilônicas são exemplo disto -, como passa, em seguida, para o quadro geométrico com os trabalhos de Oresme e Galileu e depois, com Euler, para o quadro algébrico. E possivelmente, nos últimos anos, passa a integrar um novo quadro: o informático. Se 'aprender um conceito', isto é, se 'apropriar-se de um conceito' requer que o aluno possa estudar as propriedades desse conceito em um quadro a partir das relações que podem ser estabelecidas entre os elementos desse conceito em outro quadro, temos necessariamente que elaborar situações-problema adequadas, para o que só uma análise histórico-epistemológica poderia nos auxiliar.

Vê-se, portanto, que, tal como ocorre com os demais autores que analisamos anteriormente, também para Douady, a análise epistemológica é concebida como uma segunda história, isto é, como uma segunda história pedagogicamente orientada. De fato, qual o interesse de se buscar, por intermédio de uma análise epistemológica da história de uma idéia matemática, os diferentes quadros sob os quais um mesmo conceito se manifestou se não se tivesse a intenção de que o resultado dessa busca, isto é, os diferentes quadros resultantes, fosse ser utilizado para, de *algum modo* (elaboração de situações didáticas, produção de desequilíbrios, desejo de se realizar um ensino e/ou uma aprendizagem eficaz, etc.) , ancorar a investigação didática e/ou a ação pedagógica? Dessa forma, o papel da história da matemática na investigação didática e na ação pedagógica, ainda que jamais explícito no trabalho de Douady, insinua-se através do papel sutil desempenhado pela noção de 'jogo de quadros' no âmbito da pesquisa realizada.

Mas não é através da noção de ''jogo de quadros' que se revela o *comprometimento involuntário* de Douady com a teoria da complementaridade a que fizemos referência anteriormente. Esse comprometimento se insinua através de sua proposta do modo como deveriam ser elaboradas as situações didáticas, isto é, do modo como deveria ser planejada e processada a gênese escolar dos conceitos matemáticos. De fato, para ela, essa 'gênese escolar' dos conceitos deve estar ancorada na 'construção científica' do conhecimento matemático, construção esta só passível de ser apreendida mediante análises epistemológicas da produção histórica desse conhecimento. Mas onde lançar as âncoras neste vasto mar da história? É a epistemologia, mais uma vez, que deve fornecer o *critério* para a escolha das regiões adequadas. Dentre os vários critérios possíveis, Douady elege uma *categoria dual*, a que denomina *dialética instrumento-objeto*, categoria esta que, juntamente com a noção de *jogo de quadros*, sustenta e fundamenta a sua proposta de ação pedagógica e de prática de investigação em Educação Matemática baseadas na estrutura *Atividades-Institucionalização-Exercícios*. Ouçamos Artigue explicitar as três hipóteses básicas sobre as quais a proposta de Douady[264] se assenta:

> 1) Num conceito matemático convém distinguir o seu caráter de instrumento do seu caráter de objeto. Por instrumento entende "o seu funcionamento científico nos diversos problemas que permite resolver", por objeto, compreende "o conceito matemático considerado como objeto cultural que tem o seu lugar num edifício mais vasto, que é o saber instituído socialmente reconhecido num dado momento"; 2) um conceito desempenha, frequentemente, o papel de instrumento implícito de se tornar um objeto do saber constituído; 3) em geral pode ser mobilizado em diversos contextos (físico, geométrico, numérico, gráfico...) entre os quais se estabelecem correspondências que podem ser motoras da progressão do saber.

A natureza *dual* da categoria 'dialética instrumento-objeto' se assenta no fato de que, na realidade, não existiria *oposição*, e sim *complementação*, entre essas duas formas das idéias matemáticas se manifestarem na história, ora como instrumentos de resolução de problemas, ora como objetos culturais socialmente instituídos. O conhecimento matemático passa, então, a ser concebido não única e exclusivamente como instrumento *ou* como objeto, mas *simultaneamente* como instrumento *e* objeto.

A *natureza dialética* dessa categoria dual advém do fato de a primeira dessas formas de manifestação histórica das idéias matemáticas (isto é, a sua instrumentalidade) sempre dar seguimento à outra (isto é, à sua institucionalização cultural) num ciclo ininterrupto e interminável.

É claro que essa *concepção dual acerca da natureza das idéias matemáticas é uma concepção epistemológica acerca da matemática* através da qual a história das idéias matemáticas passa a ser lida, ainda que a intenção dessa leitura seja meramente metodológica e/ou pedagógica.

Por sua vez, *essa concepção cíclico-dialética acerca do modo como se processa o desenvolvimento das idéias matemáticas na história*, é uma *concepção epistemológica acerca da história das idéias matemáticas*, ainda que a intenção de Doaudy não seja a de fazer história, mas tão somente uma análise epistemológica da história.

Além do mais, quando essa *concepção histórico-epistemológica cíclico-dual* é projetada nos níveis psicológico e didático, ela se transforma também numa *concepção cíclico-dual acerca da cognição matemática e do ensino-aprendizagem da matemática*.

Poder-se-ia perguntar, entrentanto, se, na proposta de Doaudy, teria sido, a rigor, a sua concepção histórico-epistemológica cíclico-dual projetada nos níveis psicológico e didático ou se teria sido a sua concepção cíclico-dual acerca da cognição e do ensino-aprendizagem projetada na história? Devido aos seus interesses primariamente pedagógicos no terreno da didática da matemática, parece-me mais plausível a segunda dessas alternativas. Desse modo, a história da matemática passa a ser vista, ainda que involuntariamente, como o espelho da didática, e como, neste último terreno, Doaudy impõe-se a necessidade de elaborar um modelo fixo, de natureza cíclico-dual, para o desenvolvimento do ensino da matemática e para a investigação sobre esse ensino, acaba pressupondo que a constituição das idéias matemáticas na história tivesse que obedecer a esse mesmo modelo cíclico binário. Douady não nos fornece, porém, nenhum argumento para reforçar o fato de a história das idéias matemáticas ter que obedecer necessariamente a esse modelo.

---

[264] (Artigue & Douady, 1993, p. 53).

A história das idéias matemáticas, vista agora através do espelho da didática, fecha-se em si mesma e transforma-se num círculo.

4.4. A concepção cíclico-dual de Anna Sfard acerca do papel da história da matemática na investigação em Educação Matemática

Anna Sfard[265]

Diferentemente de Douady, Anna Sfard, professora e investigadora do *The Science Teaching Centre* da *The Hebrew University* de Jerusalém - Israel, defende explicitamente não apenas uma *concepção histórico-epistemológica dualista* acerca da natureza dos conceitos matemáticos, como também uma *concepção psicológica de natureza dualista* acerca do processo de construção pessoal dos conceitos matemáticos por parte do estudante. É isso o que evidencia a análise de dois artigos publicados pela autora[266], aos quais faremos constantemente referência a partir de agora, com o objetivo de apreender o modo como a história da matemática participa da reflexão e das investigações levadas a cabo pela autora no terreno da educação matemática.

No primeiro desses artigos, o propósito central da autora é o de apresentar uma perspectiva teórica que possa servir de base para a investigação do papel

[265] Acesso foto: (http://www.ufm.umu.se/english/events/sfard/).

desempenhado pelas *concepções algorítmicas ou operacionais/operatórias dos conceitos* matemáticos no pensamento matemático.

Essa perspectiva teórica assenta-se em algumas teses fundamentais em favor das quais a autora procura argumentar no artigo: 1) a de que noções ou conceitos matemáticos abstratos (tais como número e função, por exemplo) podem ser concebidos ou *estruturalmente* como objetos ou *operacionalmente* como processos; 2) a de que essas duas formas de *concepção dos conceitos* matemáticos, embora nos apareçam como ostensivamente incompatíveis são, na realidade, complementares; 3) a de que o processo de aprendizagem matemática consiste de um jogo complexo de interações entre as *concepções estrutural e operacional/operatória de um mesmo conceito*; 4) a de que a concepção operacional/operatória de um novo conceito matemático, é para a maioria das pessoas, o primeiro passo para a sua aquisição.

A análise do papel desempenhado, no pensamento matemático, pela forma algorítmica ou operacional de se conceber os conceitos, à luz dessa perspectiva proposta, leva Sfard a concluir que o longo e complexo processo de transição das formas operacionais/operatórias de se conceber os conceitos matemáticos para a sua concepção estrutural (isto é, como objetos matemáticos abstratos) passaria por três fases: interiorização, condensação e reificação.

É importante assinalar que, para Sfard, as palavras *conceito* (ou noção) e *concepção* são utilizadas com a seguinte distinção: por conceito entende a 'forma oficial' assumida por uma idéia matemática, isto é, o construto teórico pertencente ao universo formal do conhecimento matemático idealizado, ao passo que a palavra 'concepção' é reservada para referir-se às diferentes formas assumidas por esses conceitos no universo subjetivo do conhecimento humano[267]. Em outras palavras, o conceito pertenceria ao universo público e institucionalizado do conhecimento matemático, enquanto que a concepção habitaria os mundos privados e subjetivos dos seres humanos, distinção esta que guarda uma certa analogia com aquela feita por Vygotsky entre significado e sentido de uma palavra.
No segundo artigo, o qual compõe a coletânea organizada por Paul Cobb, sob o título *Learning Mathematics: constructivist and interactionist theories of*

---

[266] (Sfard, 1991); (Sfard & Linchevski, 1994) e (Sfard, 1995).
[267] (Sfard, 1991, p. 3).

mathematical development, Sfard e Linchevski propõem-se a tematizar o simbolismo algébrico, tanto ao nível histórico-epistemológico quanto ao nível da aprendizagem individual, concebendo-o como um instrumento cuja significação variaria não somente em função dos problemas aos quais esse simbolismo se aplica, como também em função da habilidade e da percepção dos sujeitos que com ele lidam. A análise desse instrumento é baseada naquilo que as autoras denominam *teoria da reificação* de acordo com a qual haveria uma *dualidade processo/objeto* subjacente à maioria dos conceitos matemáticos[268].

A tese central em favor da qual Sfard procura argumentar no terceiro artigo é a da existência daquilo que chama de um *fenômeno recorrente* ou de um *padrão constante* no desenvolvimento das idéias matemáticas abstratas na história. Para isso, realiza um estudo de caso histórico tomando como objeto de investigação a história das idéias algébricas. Explicitando melhor a sua tese, Sfard assinala que o padrão constante a que se refere manifestar-se-ia no transcurso *de um nível ao outro* do processo cíclico-dual de formação das idéias matemáticas na história. Dessa forma, o processo histórico de desenvolvimento das idéias matemáticas é visto como um *processo hierárquico* no qual um determinado conceito manifestar-se-ia *primeiro operacionalmente* (isto é, como um processo computacional) em um nível e *depois estruturalmente* no nível seguinte[269].

Como se observa, o núcleo básico comum que se apresenta nas teses dos três artigos que estamos comentando diz respeito à defesa de uma espécie de *singularidade* caracterizadora do estatuto epistemológico e ontológico dos conceitos matemáticos em relação aos dos demais tipos de conhecimento, qual seja, a sua *dualidade operacional-estrutural.*

Não tem sido desprezível o número de autores que, nas últimas décadas têm proposto descrever/conceber o conhecimento matemático utilizando categorias bipolares. A própria Sfard apresenta em seu artigo algumas dessas propostas: matemática abstrata versus matemática algorítmica, devida a Halmos; matemática declarativa versus matemática processual, devida a Anderson; matemática dialética versus matemática algorítmica, devida a Henrici; matemática conceptual

[268] (Sfard & Linchevski, 1994, p. 191).
[269] (Sfard, 1995, p. 16).

versus matemática processual, devida a Lesh e Landau e também a Hiebert; matemática instrumental e matemática relacional, devida a Skemp[270].

À primeira vista, portanto, poderia parecer que a dialética operacionalidade-estrutura de Sfard seria algo idêntico à dialética instrumento-objeto de Doaudy[271] ou a outras tantas oposições bipolares do conhecimento matemático como aquelas às quais me referi acima.

Entretanto, para além das eventuais semelhanças existentes entre elas, Sfard destaca duas características que distinguiriam a sua dialética operacionalidade-estrutura das demais: a sua natureza simultaneamente ontológica e psicológica e a sua filiação à perspectiva da teoria da complementaridade.

O caráter distintivo dessa primeira característica diz respeito ao fato de que, segundo Sfard, a maior parte dos autores que também tentaram basear as suas explicações em pares duais, o fizeram desconsiderando ou marginalizando a questão da existência de pressupostos filosóficos tácitos subjacentes a qualquer atividade matemática. Desse modo, esses autores acabaram focalizando *dicotomicamente*, em suas explicações, *ou* certos aspectos óbvios relativos ao conhecimento (como, por exemplo, a sua estrutura ou o papel desempenhado por seus diferentes componentes no processo de resolução de problemas), *ou* então os processos cognitivos envolvidos na manipulação do conhecimento[272]. Contrariamente a isso, Sfard assinala que, em sua abordagem, ela procurou *romper com essa dicotomia* "focalizando a natureza das entidades matemáticas (aspecto ontológico) do modo como elas são percebidas pelo sujeito cognitivo (perspectiva psicológica)"[273].

Por sua vez, continua Sfard, o caráter distintivo da segunda característica diria respeito ao fato de que, diferentemente das demais abordagens dicotômicas que meramente *decompõem* o conhecimento matemático em dois componentes

[270] (Sfard, 1991, p. 7-8).

[271] Das três referências de Sfard nas quais estou baseando a minha análise, em apenas um momento a autora cita Douady a fim de informar o leitor acerca da semelhança existente entre o seu ponto de vista e o de Douady: "Deve ser também mencionado que a idéia de *dualidade* processo/objeto dos conceitos matemáticos, que é central para este artigo, lembra a *dicotomia* instrumento/objeto de Douady" (Sfard & Linchevski, 1994, p. 193, itálicos meus). No entanto, o próprio fato de Sfard referir-se ao seu sistema bipolar como 'dualidade' e ao de Douady como 'dicotomia', traz implícita uma crítica ao ponto de vista daquela autora.

[272](Sfard, 1991, p. 8).

estanques (como, por exemplo, em conceitos *ou* em procedimentos), a sua *perspectiva complementarista* enfatizaria a *unidade* do conhecimento matemático: "em vez de *conceptual* e *processual*, ou *algorítmico* e *abstrato*, os termos *operacional* e *estrutural* às inseparáveis, embora dramaticamente diferentes, facetas de uma mesma coisa"[274]. Como se vê, com isso, Sfard[275] está querendo chamar a nossa atenção para a distinção fundamental entre *dicotomia* e *dualidade*, mostrando ter consciência do pressuposto básico sobre o qual se assenta a teoria da complementaridade, tal como a entendem Otte e Steiner:

> [...] é muito importante enfatizar que as concepções operacional e estrutural de uma mesma noção matemática não são mutuamente exclusivas. Embora ostensivamente incompatíveis (como pode algo ser um processo e um objeto ao mesmo tempo?), elas são, na realidade, complementares. O termo "complementaridade" é usado aqui no mesmo sentido que em Física, onde as entidades de níveis subatômicos podem ser consideradas tanto como partículas quanto como ondas a fim de darem conta da descrição e explicação completas dos fenômenos observados.

Mas além dessa filiação consciente à perspectiva complementarista, a própria Sfard, no que se refere à fonte inspiradora da sua dialética operacionalidade-estrutura, também reconhece a sua dívida para com Piaget. De fato, Piaget distinguiu dois modos diferentes de pensamento matemático que poderiam ser co-relacionados com os dois polos que compõem o sistema dual de Sfard: o pensamento matemático *figurativo*, que por caracterizar-se como aquele que focaliza exclusivamente estados momentâneos e estáticos de uma de uma noção, corresponderia ao polo das *concepções estruturais* do sistema dual de Sfard; e o pensamento matemático *operatório*, que por caracterizar-se como aquele que se centra nas transformações e em suas propriedades, corresponderia ao polo das *concepções operacionais* do sistema de Sfard.

Essa correspondência se torna mais evidente quando atentamos para alguns exemplos concretos fornecidos por Sfard para proceder à distinção entre os dois tipos de concepções dos conceitos matemáticos que compõem os dois polos de seu sistema dual[276] 1) o *conceito de função* poderia ser concebido *estruturalmente* como um conjunto de pares ordenados, e, *operacionalmente* como um processo computacional ou como um método bem definido de se passar de um

---

[273] (Sfard, 1991, p. 8).
[274](Sfard, 1991, p. 9).
[275] (Sfard, 1991, p. 4-5).
[276](Sfard, 1991, p. 5).

sistema para outro; 2) o *conceito de número natural* poderia ser concebido *estruturalmente* como uma propriedade de um conjunto ou como a classe de todos os conjuntos que possuem a mesma cardinalidade finita e, *operacionalmente*, como um número que pode ser obtido de outro número natural adicionando um, isto é, como o resultado de uma contagem; 3) o *conceito de simetria* poderia ser concebido *estruturalmente* como uma propriedade de uma forma geométrica, e, *operacionalmente*, como uma transformação de uma forma geométrica; 4) o *conceito de círculo* poderia ser concebido *estruturalmente* como o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de um ponto fixo, e , *operacionalmente*, como uma curva obtida girando um compasso em torno de um ponto fixo; 5) o *conceito de número racional* poderia ser concebido *estruturalmente* como o conjunto de pares de inteiros, em que o segundo elemento é diferente de zero, e, *operacionalmente*, como o resultado de uma divisão entre números inteiros em que o divisor é diferente de zero.

Em um outro quadro bastante esclarecedor, também contido na referência[277], a autora estabelece uma comparação entre as concepções operacional/operatória e estrutural sob os aspectos da suas características gerais, de suas representações internas, dos lugares que elas ocupam no desenvolvimento conceptual e dos papéis por elas desempenhados no processo cognitivo. No que se refere ao primeiro desses aspectos, isto é, às características gerais, enquanto a concepção operacional/operatória concebe um ente matemático como um produto de um certo processo ou o identifica com o próprio processo, a concepção estrutural concebe esse ente como uma estrutura estática, isto é, como algo parecido com um objeto real. No que se refere ao segundo desses aspectos, enquanto as representações internas ou subjetivas dos conceitos matemáticos concebidos operacionalmente seriam suportadas por representações verbais, as concebidas estruturalmente o seriam por imagens visuais. Quanto ao terceiro aspecto, enquanto as concepções operacionais dos conceitos matemáticos se desenvolveriam nos primeiros estágios da formação conceptual, as concepções estruturais desses mesmos conceitos se desenvolveriam a partir das concepções operacionais. Quanto ao quarto e último aspecto, enquanto as concepções operacionais dos conceitos seriam necessárias, mas não suficientes para uma efetiva aprendizagem, as concepções estruturais desses mesmos conceitos facilitariam todos os processos cognitivos, tais como aprendizagem, resolução de problemas, etc.

Uma vez caracterizado, em linhas bastante gerais, o ponto de vista de Sfard, vamos agora focalizar a nossa atenção para a questão que aqui nos interessa, qual seja, à do papel desempenhado pela história da matemática no processo da investigação em educação matemática. Esse papel, entrentanto, não poderia ser esclarecedoramente caracterizado sem considerar a função cumprida pela **teoria da reificação** na perspectiva dualista de Sfard.

Toda a perspectiva dualista de Sfard se apóia em um *pressuposto ontológico básico*, qual seja, o de que os objetos matemáticos deveriam ser concebidos como produtos de uma espécie de *operação mental* denominada *reificação*[278]. O pressuposto se caracteriza como ontológico porque diz respeito a uma forma de se conceber e explicar a natureza dos seres ou entes matemáticos. Por sua vez, a noção de 'reificação', embora guarde uma certa analogia com o sentido pelo qual nos habituamos a concebê-la por intermédio da literatura político-filosófica do filósofo marxista húngaro George Lukács[279], não pode ser assimilada à concepção lukacsiana. Isso porque, ainda que para ambos a reificação represente um processo de *coisificação*, de presentificação material, visual ou figurativa de uma idéia ou fenômeno, Luckács forja essa noção para explicar sociologicamente a forma psicológica de manifestação de um fenômeno sociológico, ao passo que Sfard apropria-se da mesma noção para explicar psicologicamente um fenômeno psicológico. Desse modo, Sfard acaba *reificando a própria noção de reificação*. De fato, para ela, a reificação é entendida *psicologicamente* como uma espécie de *inexplicável habilidade mental natural*, ou melhor, como uma *suposta habilidade*

---

[277] (Sfard, 1991, p. 33).
[278] (Sfard & Linchevski, 1994, p. 90).
[279] Luckács, em seu *Geschichte un Klassenbewusstsein* (*História e Consciência de Classe*), obra publicada em 1922, utilizou o termo *reificação* para designar o fenômeno, para o qual o próprio Marx já havia chamado a atenção, pelo qual, na economia capitalista, o trabalho humano se torna simplesmente atributo de uma coisa (Abbagnano, 1970, p. 808). É a seguinte a passagem de Marx que inspirou a palavra: "O fetiche da forma da mercadoria consiste simplesmente no fato de que tal forma devolve aos homens, como um espelho, os caracteres sociais de seu próprio trabalho, em forma de propriedades sociais naturais das coisas produzidas, e portanto, espelha também a relação social entre produtores e trabalho complexivo como uma relação social de coisas, tendo existência fora dos próprios produtos. Por meio deste 'qui pro quo', os produtos do trabalho tornam-se mercadorias, coisas sensivelmente supra-sensíveis, isto é, sociais" (Marx, O Capital, I, 1, parágrafo 4).

inata ou inerente aos olhos da mente de imaginar ou considerar os resultados de processos mentais como entidades permanentes[280].

Isso ocorre, a meu ver, porque o seu pressuposto ontológico traz subjacente a si próprio *um modelo explicativo cristalizador e estático da formação conceitual*, modelo este que, além disso, se aplicaria tanto ao desenvolvimento dos conceitos matemáticos na história quanto à aprendizagem individual.

De fato, apenas a título de exemplificação, vejamos como Sfard[281] aplica esse modelo no plano histórico para explicar o surgimento do que denomina "o fenômeno da álgebra geométrica grega":

> Nosso modelo de desenvolvimento conceitual sugere uma explicação adicional do fenômeno da álgebra geométrica. A geometria grega, com seu "pensamento embutido em e fundido com representações gráficas e diagramáticas"[282], estava claramente em seu estágio estrutural, ao passo que a álgebra, preocupada com processos computacionais representados verbalmente, não podia ser concebida senão de forma operacional. A forma estrutural assumida pela geometria facilitava pensar e possibilitava a realização de investigações efetivas. A retórica operacional da álgebra a tornava incômoda e improdutiva. Nenhum *insight* generalizador e profundamente penetrante era possível. *O que a Álgebra necessitava para desenvolver-se era a reificação de seus conceitos básicos*. Naquela época, nenhum meio melhor do que os objetos geométricos palpáveis estava disponível para auxiliar a reificação das computações cada vez mais complexas.

Como se percebe, é uma *apriorística categoria supra-histórica de natureza psicológica* (isto é, a operação e/ou habilidade mental de reificação) que se transforma no próprio motor do desenvolvimento das idéias matemáticas na história. O artifício subjacente ao ponto de vista de Sfard poderia ser explicitado da forma como se segue. Primeiramente, projeta-se a categoria psico-cognitiva e psicogenética da reificação no *plano epistemológico* da matemática, o que impõe que as entidades ou seres matemáticos passem a ser concebidos como *produtos* dessa categoria postulada. Mas se, no plano ontológico, os seres matemáticos são *produzidos*, quem ou que fatores e mecanismos se apresentariam como os seus produtores? Então, para uma *reificação epistêmica* haveria de corresponder uma *reificação histórica*. Mas sendo a reificação um ato mental, isto é, uma operação do pensamento, então, a história da matemática forçosamente passa a ser vista exclusivamente como a *soma dos esforços mentais* realizados pelos produtores históricos do conhecimento matemático; nenhum fator propriamente sociológico,

---

280 (Sfard & Linchevski, 1994, p. 90).
281 (Sfard, 1995, p. 23, itálicos nossos).
282 (Unguru, 1975, p. 76).

cultural ou político poderia, nessa história, desempenhar algum papel significativo. Por sua vez, esses esforços - não se sabe bem por que razões, uma vez que Sfard não nos explica - *tenderam misteriosamente* a organizar e a ordenar o desenvolvimento etapista das idéias matemáticas na história segundo uma *dialética cíclico-dual* baseada na alternância entre os polos operacional e estrutural. É o que se pode observar por intermédio do seguinte quadro-tabela apresentado por Sfard para sumariar organizadamente os estágios do desenvolvimento histórico da Álgebra[283].

Estágios no desenvolvimento da Álgebra

Type	Stage	New focus on	Representation	Historical highlights
1. Generalized Arithmetic	1.1. Operational	1.1.1. Numeric **computations**	Verbal (*rhetoric*)	Rhind papyrus, c. 1650 B.C.
			Mixed: verbal+symbolic (*syncopated*)	Diophantus, c. 250 A.D.
	1.2. Structural	1.2.1. (Numeric) **product** of computations ('*algebra of a fixed value*')	Symbolic (letter as an **unknown**)	16th century, mainly Viete (1540–1603)
		1.2.2. (Numeric) **function** ('*functional*) *algebra*')	Symbolic (letter as a **variable**)	Viete, Leibniz (1646–1716), Newton (1642–1727)
2. Abstract Algebra	2.1. Operational	**Processes on symbols** (combinations of operations)	Symbolic (no meaning to a letter)	British formalist school (de Morgan, Peacock, Gregory), since 1830
	2.2. Structural	**Abstract structures**	Symbolic	19th and 20th century: theories of groups, rings fields, etc., linear algebra

[283] (Sfard,1994, p. 99).

No fundo, a análise epistemológica da história da álgebra realizada por Sfard é bastante parecida com aquela realizada por Piaget & García. Em ambos os casos, tratam-se de histórias epistemologicamente orientadas e, por sua vez, os pressupostos epistemológicos que orientam essas histórias buscam o seu fundamento na psicologia, ou melhor, na psicogênese do conhecimento matemático. Em Piaget & García, os mecanismos cognitivos invariantes são os mecanismos de passagem de uma a outra das três etapas intra, inter e trans a que já fizemos referência; em Sfard, o mecanismo cognitivo invariante identifica-se com a *precedência do pensamento operacional em relação ao estrutural* combinada com a *atuação reiterada do mecanismo mental de reificação* na passagem de uma a outra dessas formas de pensamento.

A proposta de Sfard, portanto, tal como a de Piaget & Garcia, está baseada numa *forma psicológica especular* de se conceber a relação entre a história e a epistemologia da matemática: a história da matemática *reflete* a forma epistemológica de se conceber os seres matemáticos, isto é, a história *espelha* a epistemologia; mas, por sua vez, a epistemologia da matemática *reflete* a forma de se conceber a psicogênese do conhecimento matemático, isto é, a epistemologia *espelha* a cognição humana; logo, a história da matemática *espelha* a psicogênese. No caso de Sfard, um outro elo é ainda acrescentado a essa cadeia: a aprendizagem humana *reflete* a psicogênese.

Desta forma, e correlativamente, o mesmo modelo é aplicado também para se argumentar em favor da precedência do pensamento operacional em relação ao estrutural ao nível da aprendizagem individual da álgebra, precedência esta que, segundo Sfard, também estaria sendo reforçada por estudos empíricos[284] realizados entre os estudantes[285]:

---

[284] Um dos experimentos ao qual Sfard se refere foi o realizado, em 1979, por Clement e seus colaboradores. A conclusão a que chegou Clement foi que, mesmo alunos que tinham tido vários anos de contato com a álgebra simbólica, utilizam melhor os métodos verbais do que os simbólicos, o que se atestava pela grande dificuldade demonstrada por eles em se traduzir em equações sentenças simples tais como "Há 6 vezes mais estudantes do que professores". Em um outro experimento realizado por este mesmo autor em 1982, acabou-se constatando que os estudantes eram mais bem sucedidos em escrever programas computacionais apropriados do que traduzir em equações certos enunciados verbais presentes em problemas. Segundo Sfard, essas observações conduziram-na a conjecturar que poderia ser o caráter operacional da codificação computacional que tornava esta representação aparentemente complicada um tanto mais fácil para os alunos do que o simbolismo algébrico estrutural. Para testar essa suposição, realizou, em 1987, um experimento no qual dois grupos de estudantes entre 14 e 17 anos de idade deveriam optar por uma dentre três alternativas de dois testes de múltipla escolha, que se diferenciavam unicamente

> Em todos esses experimentos os autores enfatizam que a descoberta do fenômeno não pode ser considerada uma mera consequência da experiência de sala de aula porque os estudantes nunca tinham sido treinados para construir soluções verbais para os problemas algébricos escolares. Desse modo, o método retórico foi usado espontaneamente, independentemente da instrução. Parece, portanto, que a precedência do pensamento operacional em relação ao estrutural, pelo menos neste caso, constitui-se num daqueles *invariantes do desenvolvimento* para os quais temos procurado voltar a nossa atenção neste artigo - a presença desse invariante foi observada tanto no desenvolvimento histórico da matemática como no processo de aprendizagem individual. Todos esses resultados reforçam a *tese da dificuldade inerente* ao processo de transição de uma abordagem operacional para uma estrutural.

O quadro seguinte, também apresentado por Sfard[286], atesta a presença invariante e organizadora da dialética cíclico-dual, combinada com a atuação reiterada do mecanismo de reificação, em seu modelo explicativo da formação conceptual ao nível da aprendizagem individual.

Além disso, a própria não nega o fato de ter-se inspirado em Piaget & Garcia na elaboração de seu modelo[287]:

> Garcia e Piaget estabeleceram uma forte analogia entre os desenvolvimentos histórico e psicológico. Embora muita cautela seja aconselhável, a análise lógica não deveria ser totalmente dispensada como uma fonte potencial de insights sobre o processo de aprendizagem. Afinal de contas, a matemática é uma estrutura hierárquica na qual alguns níveis não podem ser construídos antes que outros tenham sido completados. Deste modo, depois de ter sustentado determinadas teses em relação ao desenvolvimento da álgebra sobre a base de análises lógica, ontológica e histórica, mostraremos, na próxima seção, que essas teses também se mantêm para a aprendizagem individual.

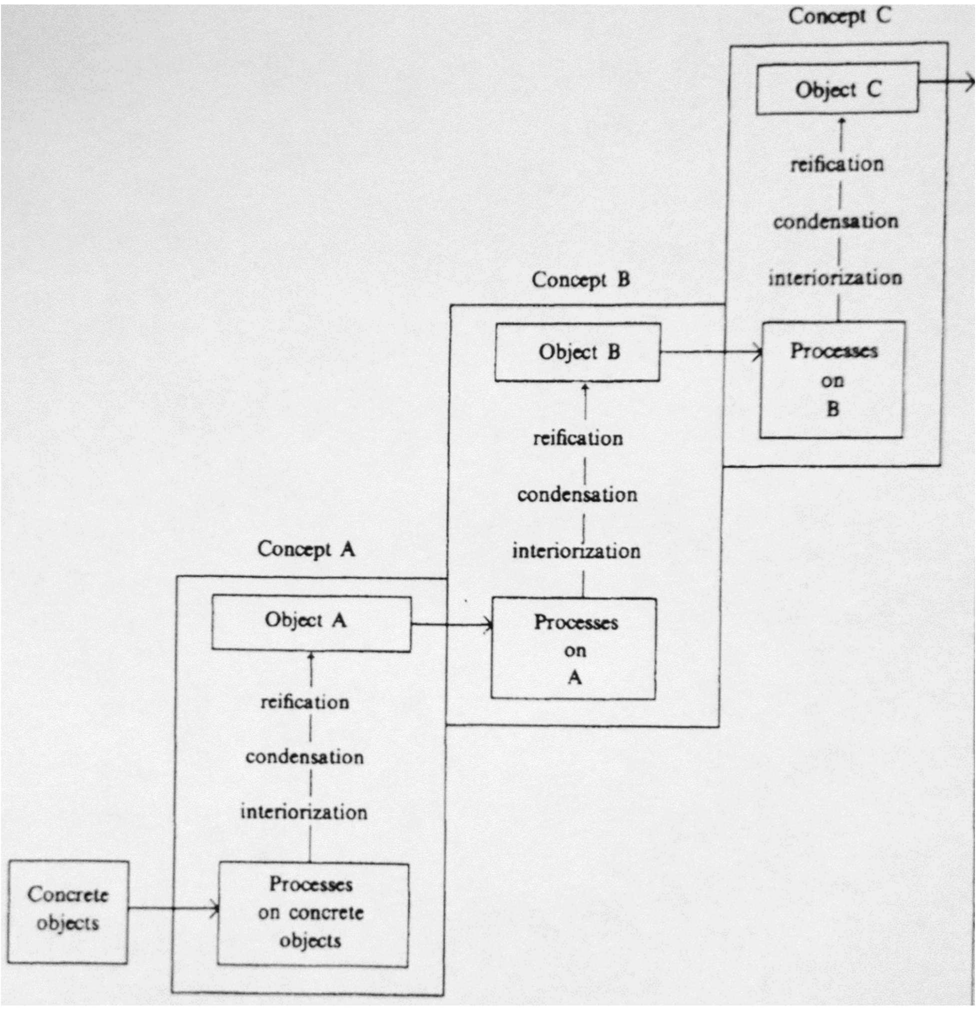
---

pelo fato de essas alternativas estarem escritas verbalmente (solução operacional) ou por intermédio de simbolismos algébricos (solução estrutural). O problema proposto era o seguinte: Em uma classe, o número de meninos supera em 4 o de meninas. Para achar o número de meninas devemos:
a) ( ) adicionar 4 ao número de meninos
b) ( ) subtrair 4 do número de meninos
c) ( ) nenhuma das anteriores
Essa era a forma operacional sob a qual as soluções do problema eram apresentadas. Chamando de x o número de meninas e de y o de meninos, as alternativas sob a forma estrutural do mesmo problema eram: a) $x + 4 = y$; b) $x = y + 4$; c) $y + x + 4$. Analisando as respostas dos estudantes, a conclusão a que chega Sfard é que, em ambos os grupos, eles foram mais bem sucedidos no primeiro teste do que no segundo, o que atestaria que os estudantes prefeririam utilizar os métodos retóricos se não fossem obrigados a utilizar os símbolos algébricos (Sfard, 1995, p. 21).

[285] (Sfard, 1995, p. 15, itálicos nossos).

[286] (Sfard, 1991, p. 22).

[287] (Sfard, 1994, p. 91).



A dívida para com Piaget é melhor esclarecida através da seguinte passagem[288]:

> O modo mais simples de se lidar com esse tipo de dúvida (isto é, a de se saber em que medida um processo de aprendizagem observado teria sido influenciado pelo método particular de ensino utilizado e o quão diferente esse processo seria em outras circunstâncias) seria dizer que no contexto psicológico, a tese "operacional antes do estrutural" deve ser entendida meramente como uma *prescrição* para o ensino. Além disso, embora tal advertência não deva ser esquecida, ela não faz inteira justiça ao modelo sugerido. Nossa argumentação está baseada na hipótese (a qual, a propósito, parece estar subjacente à maioria das pesquisas cognitivas desde Piaget) de que no processo de aprendizagem - e de qualquer aprendizagem! - podem ser identificadas certas características constantes que parecem ser totalmente imunes a mudanças em função de estímulos externos. A precedência das concepções operacionais em relação às estruturais é apresentada aqui como um de tais invariantes.

Eu acrescentaria que, é exatamente essa hipótese piagetiana da existência de invariantes no processo de aprendizagem que é projetada por Sfard para o plano histórico, e toda a análise epistemológica da história da matemática é feita para *salvar* esta hipótese. Trata-se, na verdade, de uma tentativa de acomodação

[288] (Sfard, 1991, p. 17, itálicos da autora).

da história da matemática à uma hipótese de natureza psicológica em relação à aprendizagem humana. Dessa forma, a aprendizagem da matemática, para Sfard, só lhe pode aparecer inevitavelmente como um reflexo da sua história porque a história já tinha sido antes acomodada para refletir um pressuposto relativo ao processo de aprendizagem. O parelelismo onto-psico-filogético se sustenta, portanto, em um raciocínio circular, bastante coerente com a atuação de sua invariante dialética cíclico-dual nos níveis ontológico, psicológico e histórico.

Entretanto, uma história das ideias matemáticas epistemologicamente orientada por um pressuposto psicológico dessa natureza dificilmente poderia ser encarada, hoje em dia, como uma investigação histórica dotada de legitimidade e plausibilidade, uma vez que esse empreendimento nada mais realiza do que uma re-organização de fatos, e/ou uma re-leitura alternativa a explicações históricas conhecidas, com base em um critério ou hipótese apriorística supra-histórica. De fato, são vários os momentos nos quais, em sua análise, Sfard, sem qualquer cuidado metodológico, passa do terreno histórico ao psicológico, ou vice-versa, como se os *fatos* colhidos para fundamentar as análises em um desses terrenos pudessem, sem mais, ser também utilizados para fundamentar análises no outro. Citemos apenas um exemplo dessa forma ilegítima de intercâmbio[289]:

> Vamos começar nossa análise com a noção de número. Por um longo período de tempo o significado desse termo ficou restrito àquilo que hoje se conhece como 'número natural'. Esse tipo de número tem a sua origem no processo de contagem; desse modo, antes de retornarmos à história, vamos considerar um certo fenômeno bem conhecido observado em crianças pequenas. Pesquisadores (como Piaget, por exemplo) constataram que quando uma criança aprende a contar, há um estágio em que ela já consegue estabelecer uma correspondência um-a-um entre as palavras "um", "dois", "três", ... e os objetos de um dado conjunto, mas em que ainda não consegue empregar a última palavra numérica usada nesse processo para responder a questão: "Quantos objetos existem?". Quando se pergunta isso a ela, a criança apenas consegue repetir o procedimento de contagem como um todo. Esse fenômeno mostra claramente as raízes operacionais dos números naturais: para a criança, o processo de contagem em si, e não o seu produto abstrato, é aquilo que o termo 'número' significa quando é mencionado. O significado do termo 'número' foi generalizado várias vezes no curso dos últimos três mil anos [...].

Mas esse recapitulacionismo que torna intercambiáveis as análises históricas e psicológicas de Sfard, além de constituir-se num modo ilegítimo de explicação histórica, poderia ser também questionado a partir do interior do terreno das próprias investigações sociológicas e psicológicas mais recentes[290]:

---

[289] (Sfard, 1991, p. 11).
[290] (Radford, 1997, p. 28).

> [...] desenvolvimentos recentes em sociologia do conhecimento estão desafiando o recapitulacionismo e a subjacente pressuposição crítica de um sujeito cognoscente desligado da cultura e do contexto social e cujo conhecimento pudesse ser decomposto em relações estruturais abstratas [...]. No que se refere ao recapitulacionismo, há quase 50 anos atrás Werner defendeu a existência de algumas diferenças irredutíveis entre a filogênese e a ontogênese que as tornam incomparáveis [...]. O próprio Vygotsky considerou o problema [...] e sugeriu que conjuntos de diferentes princípios governam cada domínio genético, o que torna a recapitulação impossível.

Wertsch e Toma[291], na mesma direção, acrescentam que:

> A tese de que a aprendizagem e o desenvolvimento são processos inerentemente sociais está muito mais em destaque atualmente. Ao estudarmos cognição e outras formas de processos mentais, em vez de restringir nosso foco ao indivíduo isolado, nós deveríamos investigar que aspectos-chave do funcionamento mental podem ser compreendidos considerando somente os contextos sociais nos quais eles estão envolvidos.

Tendo em vista o modo de Sfard de conceber a relação entre a história e a cognição e/ou a aprendizagem, que papel poderia cumprir, para ela, a história da matemática na investigação do processo de ensino-aprendizagem da matemática?

À primeira vista, esse papel poderia evidenciar-se como necessário e imprescindível, uma vez que as investigações histórico-epistemológicas revelariam o modo como a dialética operacionalidade/estrutura se manifestaria para cada caso específico de conceito matemático considerado, o que poderia inspirar não apenas investigações empíricas no terreno do ensino-aprendizagem como também sequências de ensino-aprendizagem no contexto da educação escolarizada. Porém, as considerações críticas feitas à perspectiva de Sfard nos poderiam levar também a encarar a história ou as análises histórico-epistemológicas como completamente supérfluas, tanto para o planejamento da ação pedagógica quanto para a investigação sobre o ensino-aprendizagem, uma vez que, tanto num caso como no outro, o mesmo mecanismo invariante não apenas é pressuposto intervir, 'a priori', em ambos os níveis, como também deverá apresentar-se como o resultado de toda e qualquer investigação.

[291] (Wertsch & Toma, apud Radford, 1997, p. 28).

5. Considerações Finais

Como o leitor provavelmente observou, as formas de se conceber a participação da história da matemática no terreno da investigação em educação matemática encontram-se sempre condicionadas a formas de se conceber a relação entre a história da matemática e a epistemologia da matemática.

Desse modo, o exame crítico a que foram submetidas essas concepções revelou-as questionáveis e inadequadas não somente, mas também e sobretudo, devido ao modo explícito ou implícito de essas formas conceberem a relação entre a história da matemática e a epistemologia da matemática. Mas se os pontos de vista anteriores acerca da relação entre história e epistemologia nos pareceram contestáveis e inadequados, o que seria, a nosso ver, uma forma plausível e defensável de se conceber essa relação?

Numa primeira aproximação, julgo-os inadequados porque, paradoxalmente, *ao tentarem distinguir* esses dois campos do saber *acabam, no fundo, tornando-os indistintos.*

A meu ver seria sim possível e apropriado, como também o consideram os autores que analisamos, distinguir as histórias da matemática das epistemologias da matemática e concebê-las como projetos pertencentes a campos distintos do saber contemporâneo. De fato, quando fazemos, por exemplo, epistemologia da matemática, o que orientaria a nossa investigação e as nossas análises seriam problemas de natureza epistemológica propriamente ditos, o que não significa que a história ou a sociologia, por exemplo, não pudessem participar direta ou indiretamente dessa análise; porém, elas o fariam de forma subordinada, isto é, enquanto instrumentos ou recursos para a constituição e tratamento de um problema que se situa na esfera da epistemologia.

Desse modo, penso que a distinção entre um projeto de cunho histórico e um de cunho epistemológico só consegue impor-se a partir dos *métodos e intenções de investigação,* explícitos ou tácitos, que orientam esses diferentes projetos. Como não há nada que impeça que as ideias matemáticas ou o conhecimento matemático possa constituir-se em objeto de investigação tanto por parte da epistemologia, quanto por parte da história, da sociologia, da psicologia, da pedagogia etc., a única forma de distinguir quando um projeto se situaria em um ou outro desses terrenos diria respeito às intenções e métodos de investigação que orientariam tal projeto.

Porém, nem sempre é possível distinguir nitidamente quando um projeto se situa em um desses terrenos ou em outro. Essa impossibilidade de distinção torna-se mais patente e aceitável quando o objeto da investigação histórica identifica-se com as idéias de uma disciplina específica como a Matemática, a Química, a Sociologia, a Filosofia, etc. De fato, se nos parece sensato distinguir entre história da matemática, epistemologia da matemática, sociologia da matemática, psicologia da matemática, etc., soar-nos-ia estranho e mesmo ilegítimo distinguir entre história das Américas, sociologia das Américas, psicologia das Américas etc.

Essa estranheza se deve ao fato de soar-nos sensato e aceitável que um conhecimento específico ou o conhecimento em geral seja abordável segundo as intenções e os métodos de diferentes campos constituídos do conhecimento, o mesmo não ocorrendo com um evento, episódio ou fato de outra natureza.

Analogamente, se nos soa sensato e aceitável que um conhecimento específico seja abordável segundo as intenções e métodos de diferentes campos constituídos do conhecimento, o mesmo não ocorre quando o que está em jogo não é o conhecimento específico propriamente dito, mas a *história desse conhecimento.*

Uma coisa seria aceitar a distinção entre pedagogia da matemática e epistemologia da matemática pois, embora sejam, ambos, empreendimentos intencionados relativos ao conhecimento matemático, eles o são em *duas áreas distintas do conhecimento;* outra coisa diferente seria aceitar a distinção entre história da matemática e história da matemática com intenções epistemológicas.

Em outras palavras, embora seja legítimo distinguir entre história da matemática e epistemologia da matemática, ou mesmo entre epistemologia da matemática e história da matemática com fins epistemológicos, o mesmo não ocorre com a tentativa de se distinguir entre história da matemática e história da matemática com fins epistemológicos. Isso porque, mesmo que, como anteriormente, a história da matemática seja sempre um empreendimento intencionado relativo ao conhecimento matemático, quando falamos em história da matemática e história da matemática com fins epistemológicos, *situamo-nos dentro de um mesmo campo do conhecimento* (no caso, o da história) e, *neste* *caso,* não é a natureza da intenção que viria a descaracterizar a natureza do empreendimento.

Penso, portanto, numa segunda aproximação, que o erro em que incorrem todos os autores que analisamos quando pensam na relação entre história e epistemologia é supor que de uma análise epistemológica da história do pensamento científico ou da história da matemática se possa retirar implicações pedagógicas ou, em outras palavras, que a educação matemática deva funcionar como um espelho da epistemologia da matemática.

Isso não significa, entretanto, que não possamos distinguir entre história da matemática e análise epistemológica dessa história (isto é, uma epistemologia dessa história da matemática). Mas o que uma análise epistemológica da história da matemática poderia produzir? A meu ver, duas possibilidades de resposta se colocam: ou uma análise crítica das intenções, pressupostos e métodos, explícitos ou tácitos, nos quais se baseou o historiador para produzir aquela história, ou então, *uma outra história* da matemática, caso esta análise ou interpretação da história à qual se aplica se faça à luz de métodos, intenções e pressupostos epistemológicos diversos daqueles utilizados pelo historiador para produzir aquela história.

No primeiro caso - caso em que, de fato, estar-se-ia fazendo *epistemologia ou análise epistemológica da história* da matemática -, seria ilegítima a retirada de qualquer tipo de implicação direta para o terreno da pedagogia, sendo que o mesmo não ocorreria se estivéssemos considerando *epistemologias da matemática* propriamente ditas e não *epistemologias da história da matemática*; no segundo caso, não estaríamos, a rigor, em presença de uma epistemologia da matemática propriamente dita, mas sim diante de uma nova história, isto é, de uma história alternativa da matemática e, neste caso, a possibilidade de extração de implicações pedagógicas desta história alternativa constitui um *outro problema*, qual seja, o problema relativo ao modo como concebemos diretamente - isto é, *sem a mediação da epistemologia* - a relação entre a história da matemática e a educação matemática.

É útil ressaltar ainda que a defesa da *autonomia ou independência epistemológica* da história da matemática em relação à epistemologia da matemática não significa, no entanto, conceber esses campos como completamente disjuntos.

Penso, porém, que a *única conjunção possível* entre eles assenta-se no fato de jamais se poder fazer história temática de uma noção ou idéia matemática sem pontos de vista epistemológicos, explícitos ou implícitos, acerca da matemática, da idéia matemática que está sendo reconstituída, acerca da própria história, acerca da história das idéias, etc. e, correlativamente, de jamais se poder fazer epistemologia da matemática sem pontos de vista, explícitos ou implícitos, acerca do modo como se concebe a inserção da matemática e da epistemologia na própria história.

Mas essa posição nos obriga a conceber a epistemologia como um *discurso tornado socialmente necessário* que traduz, simultaneamente, *uma ideologia* - uma vez que o discurso epistemológico é constituinte e constituidor (não no sentido de fundamentador) de si próprio e de toda forma de discurso que, a fim de legitimar-se e ser legitimado, recorre à persuasão fechando-se em torno de si próprio e iludindo-se a si próprio -, e *uma forma de poder*, uma vez que produz grupos e instituições sociais com interesses e formas de ação e interferência específicos dentro do contexto social; e, como todo discurso, um emprendimento sócio-histórico enraizado e passível de receber explicações sócio-históricas, mesmo quando se desdobra em um sem-número de projetos subjetivistas sob a forma de *análises epistemológicas*. Nesse sentido, podemos questionar o estatuto de cientificidade reivindicado por esses próprios discursos.

A posição que defendi acima acerca da relação entre história e epistemologia da matemática é equivalente àquela que acredita ser supérflua ou descartável, porque ilegítima, a intermediação da epistemologia da matemática a fim de se pensar a relação da história da matemática com a educação matemática.

Aproximando-se de nossa posição, há autores, atualmente, que desconfiam até mesmo da validade da necessidade do próprio empreendimento da epistemologia geral, qualquer que seja a finalidade que se alegue para esse fim.

Nesse sentido, a própria *invenção* da ideia de que o conhecimento deveria ser encarado como algo a ser problematizado a ponto de passar a ser sustentável a crença na necessidade de uma *teoria do conhecimento* ou de uma *epistemologia*, teria sido fruto, segundo Rorty[292], da substituição operada por Descartes do dilema platônico expresso pela distinção entre aparência versus realidade, por um outro dilema, qual seja, o da distinção entre o que se apresentava como interno ou externo à mente:

> A idéia de uma "teoria do conhecimento" cresceu ao redor desse último problema - o problema de saber se nossas representações internas eram precisas. A idéia de uma disciplina devotada à "natureza, origem e limites do conhecimento humano" - a definição de "epistemologia" dos livros de texto - exigia um campo de estudo chamado "a mente humana", e esse campo foi o que Descartes criou. A mente cartesiana tornava simultaneamente possíveis o ceticismo do véu-de-idéias e uma disciplina voltada a frustrar tal ceticismo [...]. A invenção da mente por Descartes - sua aglutinação de crenças e sensações nas idéias lockeanas - deu aos filósofos um novo terreno onde pisar. Proporcionou um campo de inquirição que parecia "prévio" aos temas sobre os quais os filósofos antigos haviam tido opiniões. Mais que isso, proporcionou um campo no interior do qual a *certeza,* enquanto oposta à mera *opinião,* era possível. Locke tornou a "mente" recém-excogitada por Descartes no assunto tema de uma "ciência do homem" - a filosofia moral enquanto oposta à filosofia natural. Ele o fez por pensar confusamente que um análogo para o "espaço interno" da mecânica das partículas de Newton iria de algum modo ser "de grande vantagem para dirigir nossos Pensamentos na busca de outras Coisas" e iria de alguma forma deixar-nos "ver com que Objetos nossas Compreensões eram ou não preparadas para lidar". Esse projeto de aprender mais sobre o que podíamos conhecer, e como poderíamos conhecê-lo melhor estudando como nossa mente funcionava, iria ao final ser batizado "epistemologia". Mas antes que o projeto pudesse chegar à plena autoconsciência, era preciso que se encontrasse um modo de torná-lo um projeto *não-empírico*. Tinha que ser uma questão de reflexão suporte, independente de descobertas psicológicas e capaz de produzir verdades necessárias. Embora Locke houvesse retido o novo espaço interno de pesquisa - o funcionamento da recém-inventada mente cartesiana -, não fora capaz de agarrar-se à certeza cartesiana. O "sensualismo" de Locke não era ainda um candidato talhado para a posição vaga de "rainha das ciências". Kant pôs a filosofia "na trilha de uma ciência" colocando o espaço externo dentro do espaço interno (o espaço da atividade constituinte do ego transcendental) e, então, afirmando a certeza cartesiana sobre o interno para as leis do que previamente se pensava ser o externo. Ele reconciliou, assim, a afirmação cartesiana de que apenas podemos ter certeza sobre nossas idéias com o fato de que já tínhamos certeza - conhecimento a priori - sobre o que parecia não serem idéias. A revolução copernicana foi baseada na noção de que apenas podemos saber a priori sobre objetos se os "constituímos", e Kant nunca foi perturbado pela questão de como poderíamos ter conhecimento apodítico dessas "atividades constitutivas", pois supunha-se que o acesso privilegiado cartesiano cuidaria disso. Uma vez que Kant substituiu a "filosofia da compreensão humana do celebrado sr. Locke" pelo "tema mítico da psicologia transcendental" (nas palavras de Strawson), a "epistemologia" como disciplina transcendental atingiu a maioridade. Além de elevar a "ciência do homem" de um nível empírico para um apriorístico, Kant fez três outras coisas que ajudaram a filosofia-enquanto-epistemologia a tornar-se autoconsciente e autoconfiante. Primeiro, identificando o tema central da epistemologia como sendo as relações entre duas espécies de representações igualmente reais mas irredutivelmente distintas - as "formais" (conceitos) e as "materiais" (intuições) -, ele tornou possível ver continuidades importantes entre a nova problemática epistemológica e os problemas (os da razão e os de universais) que haviam preocupado os antigos e medievais [...]. Segundo, ligando a epistemologia à moralidade no projeto de "destruir a razão para abrir espaço para a fé (isto é, destruindo o determinismo newtoniano para abrir espaço para a consciência moral comum), ele reviveu a noção de um "sistema filosófico completo", no qual a moralidade era "baseada" em algo menos controverso e mais científico [...].

---

[292] (Rorty, 1994, p. 144-146 e p. 147, itálicos do autor).

> Terceiro, tomando tudo que dizemos como sendo sobre algo que "constituímos", ele tornou possível que se pensasse na epistemologia como uma ciência fundamental, uma disciplina suporte capaz de descobrir as características "formais" (ou, em versões posteriores, "estruturais", "fenomenológicas", "gramaticais", "lógicas" ou "conceituais") de qualquer área da vida humana. Assim, ele capacitou os professores de filosofia a se verem presidindo um tribunal da razão pura, capaz de determinar se outras disciplinas estavam se mantendo dentro dos limites legais estabelecidos pela "estrutura" de seus assuntos temas [...]. Tentarei apoiar a afimação (comum a Wittgeinstein e Dewey) de que para pensar no conhecimento como apresentando um "problema", e mais, um problema sobre o qual deveríamos ter uma "teoria", é preciso encarar o conhecimento como uma reunião de representações - uma visão de conhecimento que, tenho argumentado, era um produto do século XVII. A moral a ser extraída é que se esse modo de pensar em conhecimento é opcional, então a epistemologia também é, e também a filosofia como tem sido compreendida desde a metade do último século.

Restivo[293], por sua vez, em seu projeto, bastante semelhante ao meu, de colocar a matemática e a história da matemática sobre bases exclusivamente sociológicas, argumenta que seria necessário ir ainda mais além dessa 'moral alternativa' proposta por Rorty, a qual é por ele caracterizada como integrando "tratamentos filosóficos da percepção e do conhecimento em geral que, embora estejam *semiconscientes do imperativo sociológico,* acabam reprimindo a sua força completa":

> O pragmatismo de Richard Rorty começa com uma estratégia de extinguir a epistemologia; mas no final, Rorty ocidentaliza (ou, mais precisamente, americaniza) a epistemologia (a qual passa a ser uma reflexão do poder do pragmatismo como uma "filosofia americana") e dá a ela uma moratória. Ele explicitamente restringe a preocupação moral à "conversação do Ocidente". Marginalizando a conjectura de uma construção social radical da natureza do conhecimento, o ponto de vista de Rorty é restrito devido: 1) à ênfase que dá ao ideal de conversação polida e ao seu fracasso em lidar com formas mais militantes e violentas de prática social da ciência e da cultura em geral: 2) ao seu preconceito ocidental, manifestado em sua dívida intelectual e cultural; 3) à sua concepção khuniana prescritiva da relação entre hermenêutica ("ciência revolucionária") e epistemologia ("ciência normal") que constitui uma obstrução às investigações críticas e um artifício para salvar a epistemologia; 4) à ênfase posta na concepção não-sociológica de justificação.

Uma vez descartada a necessidade de intermediação da epistemologia da matemática a fim de se pensar a relação da história da matemática com a educação matemática, dever-se-ia ainda enfrentar o problema da relação direta, isto é, sem intermediação, entre a história e o ensino-aprendizagem da matemática. Não farei isso aqui. Para uma reflexão e posicionamento pessoais acerca dessa relação, o leitor poderá consultar a referência (Miguel, 1999).

---

[293] (Restivo, 1993, p. 268).

Em vez disso, como, de certo modo, foram as reflexões de Waldegg[294] acerca dos modos de participação da história da matemática no âmbito da investigação em educação matemática que motivaram a realização deste trabalho, para finalizá-lo, decidi, compartilhá-las com o leitor tornando-as explícitas e considerando-as criticamente.

Waldegg aponta quatro formas de se conceber a participação da história da matemática na pesquisa contemporânea em Educação Matemática, estando cada uma dessas formas baseada em um tipo de pressuposto ou hipótese em relação ao modo de se conceber a relação entre a história, a epistemologia e a educação matemática[295].

Uma primeira forma de participação[296] se estabelece quando *a história da matemática é concebida como um laboratório* no qual se coletam dados para a realização de estudos empíricos e no qual hipóteses são postas à prova. Mas que *dados* são esses que poderiam ser buscados no *laboratório* da história?

Segundo a autora, nesse tipo de investigação, são os objetivos didáticos, estabelecidos a partir de questões relativas à aprendizagem matemática na sala de aula, que determinam os tipos de dados a serem buscados na história. Se assim é, uma questão se apresenta a essa primeira forma de se conceber a participação da história na investigação didática: como e com que legitimidade verificar hipóteses didáticas no terreno da história?

Segundo Waldegg, a possibilidade de a história funcionar como um *laboratório* para a didática assentar-se-ia no fato de serem as situações didáticas, em última instância, "situações de apreensão de conceitos e construção de saberes", isto é, situações que colocariam inevitavelmente ao investigador questões de natureza epistemológica[297]. Recorre-se então à história a fim de se tentar fazer uma tradução ou leitura epistemológica do desenvolvimento de uma noção ou conceito matemático. Mas a história só funciona como um *laboratório de primeira instância*, uma vez que os 'dados' obtidos dessa tradução ou leitura epistemológica devem, necessariamente, retornar ao *laboratório de última*

[294] (Waldegg, 1997).
[295] Para um estudo detalhado da relação entre história, epistemologia e educação matemática, consultar a referência (Miguel, 1999).
[296] (Waldegg, 1997, p. 43-44).
[297] (Waldegg, 1997, p. 43).

instância da sala de aula no qual as mesmas hipóteses devem ser *novamente* testadas.

Poderíamos indagar então a respeito da necessidade de o investigador recorrer ao laboratório de primeira instância da história se o veredito final deve ser dado pelo laboratório de última instância da sala de aula. A brevíssima resposta dada a essa questão, que a própria Waldegg não se coloca, é que "a tradução epistemológica do desenvolvimento histórico é necessária e mesmo indispensável para que os resultados adquiram uma significação didática"[298].

Mas esse tipo de resposta levanta outras indagações: 1) Como interpretar o empreendimento de realização de uma tradução ou leitura epistemológica da história de uma idéia? Isso não se confunde com o empreendimento de se fazer a história - ou melhor, *as histórias* - de uma questão de natureza epistemológica relativa a uma idéia matemática? Mas se assim é, esses dois empreendimentos se tornam indistintos e a tarefa do epistemólogo se confunde com a do historiador; 2) Mas com base em que se poderia esperar que a história de uma questão de natureza epistemológica relativa a uma idéia matemática viesse revelar a sua significação didática?

Waldegg coloca-se esta última questão em outros termos, isto é, indagando-se a respeito de como seria possível estabelecer uma *conexão prática* entre os domínios da história, da psicologia e da didática. Sua resposta é a seguinte[299]:

> Não se trata (a experiência nos tem mostrado dolorosamente) de fazer uma transposição mecânica dos métodos e categorias de análise da pesquisa epistemológica à didática. A ligação é um pouco mais sutil, porém, ao mesmo tempo, mais profunda. A teoria epistemológica determina as questões que abrem a pesquisa, que tornam "observáveis" certos fatos (psicológicos, didáticos ou históricos) e organiza as interpretações dos dados seguindo certos princípios teóricos de fundamento.

Mas se assim é, então, a *teoria epistemológica* acaba se confundindo com o referencial teórico explícito ou implícito que orienta a investigação, não apenas no que se refere à seleção das questões a serem investigadas como também, à forma de abordá-las e de interpretar os resultados.

Porém, esse papel legítimo que se imprime à epistemologia (e legítimo em qualquer tipo de investigação, diga-se de passagem), nada tem a ver com o papel a

---

[298] (Waldegg, 1997, p. 43).
[299](Waldegg, 1997, p. 43).

ela atribuído anteriormente (qual seja, o de revelar a significação didática de uma idéia matemática) e em nada justifica, a meu ver, uma suposta *conexão prática* entre os domínios da história, da psicologia e da didática.

Segundo Waldegg, uma segunda forma de se conceber a participação da história da matemática na pesquisa contemporânea em Educação Matemática é aquela se baseia na crença de que o desenvolvimento de uma noção matemática atravessa um certo número de etapas definidas tanto na filogênese quanto na construção individual do conhecimento por parte do estudante.

Neste caso, o investigador recorre à historia da matemática a fim de identificar nela certos mecanismos de passagem de uma a outra dessas etapas, tendo em vista o pressuposto de que os estudantes (ou os sujeitos de pesquisa) precisariam desenvolver e operar com mecanismos análogos em seus processos de construção individual do conhecimento matemático[300].

Não comentaremos aqui esse ponto de vista, uma vez que já tecemos suficientes considerações críticas a ele quando nos referimos aos trabalhos de investigação inspirados no referencial de Piaget & García.

Uma terceira forma de se conceber a participação da história da matemática na pesquisa contemporânea em Educação Matemática seria aquela instaurada pelos trabalhos de Régine Douady a respeito dos dois estatutos diferentes de que se revestem os objetos ou conceitos matemáticos, quais sejam, o de ferramenta e o de objeto. Também já tecemos considerações suficientes a respeito desse ponto de vista neste trabalho.

Uma quarta forma de se conceber a participação da história da matemática na pesquisa contemporânea em Educação Matemática seria aquela instaurada por Yves Chevallard em seus estudos sobre a *transposição didática.*

Segundo Waldegg, recorre-se à história nesse terceiro tipo de investigação a fim de se estudar e esclarecer a evolução das ligações entre o ensino escolar da matemática e a esfera da produção do saber matemático, por acreditar-se que isso possibilitaria a compreensão das características de que se reveste o ensino atual da matemática[301].

[300] (Waldegg, 1997, p. 44).
[301] (Waldegg, 1997, p. 44).

A forma de participação da história que está subjacente a essa abordagem se diferencia das anteriores sobretudo por abandonar o pressuposto do paralelismo ontofilogenético de mecanismos de passagem ou de obstáculos epistemológicos e basear-se na hipótese de que o conhecimento escolar diferencia-se do conhecimento formal da matemática e de que a história poderia fornecer subsídios imprescindíveis para a compreensão do modo como esses dois tipos de conhecimento se relacionam.

Era inicialmente minha intenção desenvolver também um estudo dessa última forma de participação da história da matemática na pesquisa em educação matemática. No entanto, isso tornou-se inviável dentro do tempo de que dispúnhamos, e procurarei, em outra ocasião, considerar esse referencial.

Finalmente, tentando tornar explícitas algumas teses que tentamos defender ao longo deste estudo acerca das formas de participação da história da matemática no terreno da investigação em educação matemática, é possível dizer sumariamente que ele nos mostrou que:

- as formas de se conceber essa participação estão condicionadas a formas de se conceber a participação da história da matemática no plano da educação matemática e, mais particularmente, no plano do ensino-aprendizagem da matemática escolarizada;
- as formas de se conceber a participação da história no plano do ensino-aprendizagem da matemática escolarizada estão condicionadas a formas de se conceber a relação entre a história da matemática e a epistemologia da matemática e/ou a história da matemática e a cognição humana, isto é, são formas epistemologicamente mediadas e/ou psicologicamente mediadas;
- embora exista a intenção, inexiste clareza nas propostas de distinção entre história de uma noção matemática e epistemologia dessa mesma noção, uma vez que toda história é, necessariamente, epistemologicamente orientada, o que torna sem função adicional aparente a necessidade de mediação da epistemologia;
- descartada a epistemologia, a grande maioria das pesquisas acham-se presas a certas formas de concepções especulares da relação direta (isto é, sem mediação) entre história da matemática e cognição matemática e/ou entre história da matemática e ensino-aprendizagem da matemática.

6. Referências bibliográficas

ABBAGNANO, Nicola (1970). *Dicionário de Filosofia.* São Paulo: Editora Mestre Jou.
ALEKSANDROV, A. D. *et al.* (1985). *La matemática: su contenido, métodos y significados.* Vol. I e II Madrid: Alianza Universidad.
ARTIGUE, Michèle. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didatiques des Mathématiques,* Vol.10/ 2.3, p. 241-285.
ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine. (1993). A didática da matemática em França. *Quadrante,* vol. 2, n. 2.
BACHELARD, Gaston. (1991). *La fomación del espíritu científico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. México: Siglo veintiuno editores, s. a. 17ª. edición.
BACHELARD, Gaston. (1996). *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro: Contraponto.
BARNETT, J. H. (1996). *Anomalies and the development of mathematical understanding*. In: Actas da Deuxième Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique.Volume II, p. 230-237. Braga, Portugal.
BEBBOUCHI, R. (1996). *La démonstration mathématique*, un obstacle epistemologique? In: Actas da Deuxième Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique.Volume II, p. 365-372. Braga, Portugal.
BEBBOUCHI, R. (1993). *À propos de la continuité*. In: Actes de la Première Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique, p. 85- 89. IREM de Montpellier.
BITTENCOURT, J. (1998). Obstáculos epistemológicos e a pesquisa em didática da matemática. Sociedade Brasileira de Educação Matemática: *Educação Matemática em Revista*, n. 6, ano 5.
BKOUCHE, R. (1996). *Épistémologie, histoire des mathématiques et enseignement*. Actas da Deuxième Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique.Volume I, p. 282-290. Braga, Portugal.
BKOUCHE, R. (1997). Épistémologie, Histoire et Enseignement des Mathématiques. *For the Learning of Mathematics* 17, 1, p. 34 -42.
BOUTROUX, Pierre. (1920). L'Ideal Scientifique des mathématiciens: dans l'antiquité et dans les temps modernes. Paris: Librairie Félix Alcan.
BOYER, Carl B. (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, Editora da Universidade de São Paulo.
BROUSSEAU, Guy. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didatiques des Mathématiques,* Vol.4.2, p. 164-198.
BROUSSEAU, Guy. (1996). *Os diferentes papéis do professor*. In: Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. (Orgs.): Cecilia Parra e Irma Saiz. Porto Alegre: Artes Médicas.
BULCÃO, M. (1981). O *Racionalismo da Ciência Contemporânea: uma análise da epistemologia de Gaston Bachelard*. Rio de Janeiro: Edições Antares.
CHACE, A. B. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*. The National Council of Teachers of Mathematics.
CHARTIER, Roger. (1990). *A história cultural: entre práticas e representações.* Lisboa: Difel - Difusão Editorial Ltda.
CHEVALLARD, Yves. (1985). *La transposition didatique: du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage. Grenoble.
CHEVALLARD, Yves. (1990). On Mathematics Education and Culture: critical afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics* 21: 3-27.
COBB, Paul. (1989). Experiential, Cognitive, and Anthropological Perspectives in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics* 9, 2.
COBB, Paul. (1996). Perspectivas experimental, cognitivista e antropológica em educação matemática. *Zetetiké*, vol. 4, n. 6, jul-dez, pp. 153-180.
COMPTE RENDU de la 39e. Reencontre Internationale de la CIAEM. (1988). Sherbrooke (Canada): Les Éditions de l'Université de Sherbrooke.
COMTE, Auguste. (1978). *Curso de filosofia positiva*. In: Os pensadores. São Paulo: Abril Cultural.
CUPANI, A. (1985). *A crítica do positivismo e o futuro da filosofia*. Florianópolis: Editora da UFSC.
DOUADY, Régine. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil/objet*. Thése d'État, Université Paris 7.
ESPINOSA, F. H. (1996). (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, S. A.

FRANÇOIS, Karen; BENDEGEM, Jean Paul Van. (2010). Revolutions in mathematics. More than thirty years after Crowe's\Ten Laws". A new interpretation. In: Benedikt Löwe, Thomas Müller (eds.). *PhiMSAMP*. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice. College Publications, London. Texts in Philosophy 11; pp. 107-120. Acessível em: (http://www.lib.uni-bonn.de/PhiMSAMP/Data/Book/PhiMSAMP-bk_FrancoisVanBendegem.pdf).

GAGATSIS, A.; THOMAIDIS, I. (1993). *L'Histoire de la valeur absolue et sa transposition didactique.* In: Actes de la Première Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique, p. 425- 429. IREM de Montpellier.

GÁLVEZ, G. (1996). *A didática da matemática*. In: Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. (Orgs.): Cecilia Parra e Irma Saiz. Porto Alegre: Artes Médicas.

GLAESER, George. (1985). Epistemologia dos números relativos. Rio de Janeiro: *Boletim GEPEM*, (17): p. 29-124.

GODINO, J.D. (1991). *Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática.* In: Area de Conocimiento: Didáctica de la Matemática. Org.: Ángel Gutiérrez Rodríguez. Editorial Sintesis. Madrid.

GILLIES, D. (1992). *Revolutions in Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

FUENLABRADA, Irma (Comp.). (2008). Homenaje a una Trayectoria: Gillermina Waldegg. Mexico: CINVESTAV/Universidad Pedagogica Nacional.

HABERMAS, Jürgen. (1982). *Conhecimento e interesse*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

HIGUERAS, L. R. & FERNÁNDEZ, J. L. R. (1989). *Los obstaculos en la ensenãnza de la matemática*. In: Actas de la IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática, p. 125-132, S.A.E.M. 'Thales, Málaga.

HIGUERAS, L. R. & FERNÁNDEZ, J. L. R. (1989). *La epistemologia historica, base de una teoria constructivista del aprendizaje en matematicas*. In: Actas de la IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática, p. 133-140, S.A.E.M. 'Thales, Málaga.

IFRAH, George. (1989). *Os números: a história de uma grande invenção*. Rio de Janeiro: Globo.

JONES, C. V. (1995). *Finding order in history learning: defining the History and Pedagogy of Mathematics*. Anais da reunião do Grupo Internacional de Estudos sobre Relações entre História e Pedagogia da Matemática (HPM), Blumenau, Brasil, p. 35-45.

KAMII, Constance. (1984). *A criança e o número*. Campinas: Papirus.

MARGOLIN, J-C. (1974). *Bachelard*. France: Éditions du Seuil.

MIGUEL, Antonio. (1993). *Três estudos sobre história e educação matemática*. Tese de doutorado Campinas (SP): Faculdade de Educação - UNICAMP.

MIGUEL, Antonio. (1996). Estudos histórico-pedagógicos temáticos e história-problema. In: Actas da Deuxième Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique.Volume II, p. 43-49. Braga, Portugal.

MIGUEL, Antonio. (1997). As potencialidades pedagógicas da história em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, volume 5, número 8, julho/dezembro de 1997, p. 73-105.

MIGUEL, Antonio. (1998a). As potencialidades pedagógicas da história em questão: argumentos reforçadores e questionadores. Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática (I SNHM), p. 29-50. Editor: Fernando Raul Neto. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco.

MIGUEL, Antonio. (1998b). História e Educação Matemática. In: Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática (VI ENEM), ocorrido em São Leopoldo - Rio Grande do Sul - no período de 21 a 24 de julho de 1998, promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática e pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos.

MIGUEL, Antonio. (1999). As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores. *Jornal de Matemática Elementar* n. 187, p. 10-16, 1999 e n. 188, p. 16-18. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.

MIGUEL, Antonio. (2015). *Formas especulares e não-especulares de se conceber a relação entre história, epistemologia e educação matemática*. E-Book: ISBN 978-85-7713-169-3. Campinas, SP: FE/UNICAMP.

MORENO, Luis. (1996). *Calculus: history and cognition*. In: Actas da Deuxième Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Education Mathématique.Volume II, p. 294-300. Braga, Portugal.

MORENO, Luis & WALDEGG, Guillermina. (1991). The conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 211-231.

OTTE, Michael. (1993). *O conceito de Complementaridade*. In: *O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática*. São Paulo: Editora da UNESP.

PIAGET, Jean. (1970). *A situação das ciências do homem no sistema das ciências*. Vol. I. Lisboa: Livraria Bertrand.

PIAGET, Jean. (1975). *Introduccion a la epistemologia genetica: el pensamiento matemático.* Buenos Aires: Editorial Paidos.
PIAGET, Jean. (1976). *A equilibração das estruturas cognitivas*. Rio de Janeiro: Zahar.
PIAGET, Jean. (1980). *Les formes élémentaires de la dialectique*. Paris: Éditions Gallimard.
PIAGET, Jean & GARCIA, Rolando. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: siglo veintiuno editores, s.a.
RADFORD, Luis. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 17, 1, p. 26-33.
RESTIVO, Sal. (1993). The social life of mathematics. In: *Math Worlds - Philosophical and social studies of mathematics and mathematics education*. Edited by: Restivo, S.; Van Bendegem, J.P.; Fischer, R. New York: State University of New York Press.
RESTIVO, Sal. (1993). The Promethean task of bringing mathematics to earth. In: *Math Worlds - Philosophical and social studies of mathematics and mathematics education*. Edited by: Restivo, S.; Van Bendegem, J.P.; Fischer, R. New York: State University of New York Press.
ROGERS, Leo. (1993). *The historical construction of mathematical knowledge*. In: Actes de la Première Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique, p. 105- 114. IREM de Montpellier.
ROGERS, Leo. (1996). *Bachelard and the epistemological obstacle: a critique from the history of mathematics.* In: Actas da Deuxième Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique.Volume II, p. 269-276. Braga, Portugal.
RORTY, R. A Filosofia e o espelho da natureza. Relume-Dumará, 2ª. edição, Rio de Janeiro, 1994.
SCHNEIDER, M. Un obstacle épistemologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, vol. 11, n. 23, pp. 241-294, 1991.
SCHUBRING, G. *Les enjeux épistemologiques des nombres négatifs*. In: Actes de la Première Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique, p. 443-449. IREM de Montpellier, 1993.
SCHUBRING, Gert. (1998). Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposição). *Zetetiké*, vol. 6, n. 10, p. 9-34, julho/dezembro. Campinas: CEMPEM - FE-UNICAMP.
SFARD, Anna. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22-1, p. 1-36.
SFARD, Anna; LINCHEVSKI, Liora. (1994). The gains and the pitfalls of reification - the case of Algebra. In: *Learning Mathematics: constructivist and interactionist theories of mathematical development*. Paul Cobb (Ed.), pp. 191-228. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
SFARD, A. The development of Algebra: confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, p. 15-39, 1995.
SIERPINSKA, Anna. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didatiques des Mathématiques,* Vol.6.1, p. 5-67.
STEINER, HANS-Georg. (1993). Teoria da Educação Matemática (TEM): uma introdução. *Quadrante*, vol. 2, n. 2.
SZABÓ, Arpad. (1960). The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. *Scripta Mathematica*, vol. XXVII, n. 1, p. 20-48, 1960 (parte 1) e vol. XXVII, n. 2, p. 113-139, 1960 (parte 2).
VUYK, Rita. (1985). Panorámica y crítica de la epistemología genética de Piaget: 1965-1980. Volumes I e II. Madrid: Alianza Editorial, 1985.
WALDEGG, Guillermina. (1993). La notion du nombre avant l'établissement de la science analytique. *Actes de la Premiére Université d'Éte Europèene: Histoire et Épistemologie dans l'Éducation Mathématique,* IREM de Montpellier.
WALDEGG, Guillermina. (1996). *La géométrie de Bolzano: convictions ontologiques et obstacles épistémologiques*. In: Actas da Deuxième Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique.Volume II, p. 154-161. Braga, Portugal.
WALDEGG, Guillermina. (1997). Histoire, Épistémologie et Méthodologie dans la Recherche en Didactique. Canadá: *For the Learning of Mathematics* 17, 1, pp. 43-46.